

## Geometrie.

Projektive und algebraische Geometrie:

● Amodeo, Federico: Ursprung und Entwicklung der projektiven Geometrie. (Publ. d. Inst. de Mat. Vol. 1, Nr. 3.) Rosario: República Argent. 1939. 219 S. [Spanisch].

Übersetzung der in dies. Zbl. 22, 3 besprochenen Arbeit ins Spanische. *Geppert.*

Bottema, O.: Die Klassifizierung der Affinitäten. Nieuw Arch. Wiskde 20, 184—191 (1940) [Holländisch].

Eine affine Transformation  $\mathfrak{x}' = A\mathfrak{x} + c$  im  $R_n$  wird gegeben durch eine quadratische Matrix  $A$ , der noch eine Spalte  $c$  angehängt ist. Nun werden Normalformen angegeben, auf die alle affinen Transformationen zurückgebracht werden können. Die Matrix  $A$  hat dabei die bekannte Jordansche Normalform; die Spalte  $c$  besteht entweder aus lauter Nullen oder aus Nullen und einer Eins; der letzte Fall kann nur dann eintreten, wenn eine charakteristische Wurzel von  $A$  gleich 1 ist. Es gibt dann ein „Kästchen“ wie:

$$x'_1 = x_1 + x_2$$

$$x'_2 = x_2 + x_3$$

$$x'_3 = x_3 + 1.$$

Es folgt: Zwei affine Transformationen sind affin äquivalent, wenn sie projektiv äquivalent sind und in der uneigentlichen Hyperebene projektiv äquivalente Transformationen induzieren.

*van der Waerden (Leipzig).*

Deaux, R.: Décomposition d'une homographie plane en un produit de deux involutions. Mathesis 53, 210—213 (1939).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der altbekannten Aufgabe, eine gegebene ternäre Homographie in ein Produkt von zwei Polaritäten oder von zwei harmonischen Perspektivitäten zu zerlegen. Diskussion der Existenz und der Anzahl der Lösungen. Bestimmung der involutorischen Projektivitäten, die eine gegebene harmonische Perspektivität in eine andere, ebenfalls gegebene harmonische Perspektivität verwandeln. Zweck des Verf. ist, eine weitere Untersuchung über ternäre Homographien vorzubereiten.

*E. G. Togliatti (Genova).*

Deaux, R.: Homographies racines carrées d'une homographie ternaire. Mathesis 53, 277—286 (1939).

Es handelt sich um die Konstruktion der ternären Homographien  $x$  aus einer gegebenen ternären, nicht identischen Homographie  $\omega$ , so daß  $x^2 = \omega$  gilt. Die Durchführung ist rein geometrisch und benützt die Ergebnisse früherer Arbeiten (dies. Zbl. 21, 247; 22, 160) des Verf.

*Steck (München).*

Deaux, R.: Réciprocités racines carrées d'une homographie ternaire. Mathesis 54, 49—59 (1940).

Die Arbeit stellt eine Fortsetzung und Vervollständigung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Note des Verf. dar und bringt zunächst die Einteilung der behandelten Homographien in fünf Typen  $T_i$ ; jeder derselben ist eine Reziprozität (in vereinigten Ebenen) assoziiert, die als Produkt zweier harmonischer Homologien fester Zentren und Achsen resultiert. Jede Homographie  $T_i$  kann als Quadrat von  $\infty^1$  Reziprozitäten aufgefaßt werden. Die Typen  $T_i$  sind durch ihre Fixelemente folgendermaßen charakterisiert:  $T_1$ : Die harmonische Homologie;  $T_2$ : Die Homographie besitzt nur drei reelle Fixpunkte; zwei einander entsprechende reelle Punkte gehören einem Kegelschnitt an, der zwei der Fixgeraden in ihren Treff-



punkten mit der dritten berührt;  $T_3$ : Die Homographie besitzt nur einen reellen und zwei konjugiert-imaginäre Fixpunkte mit denselben Spezialisierungen wie bei  $T_2$ ;  $T_4$ : Die Homographie besitzt nur zwei Fixpunkte und erzeugt auf ihrer Verbindungsgeraden eine Involution;  $T_5$ : Die Homographie besitzt nur einen einzigen Fixpunkt. — Ihnen entsprechen fünf verschiedene Typen von Reziprozitäten  $R_i$ , die im einzelnen näher untersucht und deren ausgezeichnete Elemente angegeben werden. *Steck.*

**Zito, Ciro:** Omografia dello  $S_3$  nel corpo complesso che ammettono un complesso lineare unito non speciale. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 257—270 (1939).

Es wird eine Klassifikation der Kollineationstypen des Raumes unter dem Gesichtspunkt durchgeführt, ob Kollineationen eines bestimmten Typus keinen regulären linearen Komplex invariant lassen können (diese Typen werden in § 1 synthetisch bestimmt), einen linearen Komplex unter gewissen Voraussetzungen invariant lassen (diese Voraussetzungen, Beziehungen zwischen den charakteristischen Wurzeln einer Kollineation, werden in § 2 abgeleitet) oder stets lineare Ruhekomplexe besitzen. Die gleiche Aufgabe wird in § 3 mit Hilfe Kleinscher Linienkoordinaten behandelt, und das Ergebnis wird dann in § 4 und § 5 in der Geometrie der Punkte des  $R_5$  oder der von einem Punkte des  $R_6$  ausgehenden Geraden geometrisch gedeutet. *Weiss.*

**Baron, H.:** Nachtrag zur Erweiterung des Satzes von Desargues. Mh. Math. Phys. 49, 53—54 (1940).

Vgl. die Arbeiten des Verf. in Mh. Math. Phys. 45, 335 (1937) und 46, 377 (1938); dies. Zbl. 19, 75. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

**Robinson, R. T.:** Theorems on perspectivity. Math. Gaz. 24, 9—14 (1940).

A plane cuts the edges of a tetrahedron  $ABCD$  in six points forming a complete quadrilateral. If  $UVW$  is the triangle formed by the diagonals, then 1) the triangular faces  $BCD, \dots$  are each of them in perspective with the triangle  $UVW$  from points  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , respectively; 2) the tetrahedra  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  are in perspective from  $UVW$  and from a fourth point  $\Omega$ ; 3) if we consider the three tetrahedra  $ABCD, A_1B_1C_1D_1, \Omega UVW$ , then each pair is in perspective from the four vertices of the remaining tetrahedron, etc. The proofs are given by means of analytical geometry.

*O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

**Weitzenböck, R.:** Ein Satz über assoziierte Geraden im  $R_4$ . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 13—17 (1940).

1, 2, 3 und 4 seien vier Geraden im  $R_4$ . Es sei  $S_{12}$  der dreidimensionale Raum, der 1 und 2 verbindet.  $S_{12}, S_{23}$  und  $S_{31}$  schneiden sich in einer Geraden, welche mit 4 den Raum  $S$  bildet. Sodann gehen  $S, S_{12}, S_{23}$  und  $S_{31}$  durch eine fünfte Gerade, die Assoziierte zu 1, 2, 3 und 4 (vgl. dies. Zbl. 20, 389). Es wird bewiesen: a) Fünf assoziierte Geraden allgemeiner Lage können nicht Erzeugende derselben Quadrik im  $R_4$  sein. b) Die fünfte Gerade ist der Ort der Kegelspitzen der dreidimensionalen Kegel zweiter Ordnung, die die vier ersten Geraden enthalten. *J. Haantjes.*

● **Spampinato, Nicolò:** Lezioni di geometria superiore. Fasc. 1: Introduzione dei numeri complessi, duali, bireali, bicomplexi e biduali col metodo delle matrici quadrate del 2. ordine. Fasc. 2: Gli  $S_7$  proiettivi legati alle algebre doppie reali o complesse, dotate di modulo e loro rappresentazione. Catania: Circolo mat. 1938—1939. Fasc. 1: 64 pag. L. 12.—, Fasc. 2: 88 pag. L. 18.—.

● **Comessatti, Annibale:** Elementi della teoria generale delle coniche. 2. ediz. parzialmente rifatta. Padova: Cedam, Casa ed. dott. A. Milani 1939. VI, 115 pag. L. 15.—.

**Lorent, H.:** Compléments à un théorème de Poncelet. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 532—538 (1939).

Partendo dal noto teorema di Poncelet secondo cui, se esiste un triangolo circoscritto a una conica e iscritto in un'altra, esistono infiniti triangoli in tali condizioni, si indicano alcune proprietà di tale sistema di triangoli. *P. Buzano* (Torino).



Simonazzi, Eugenia: Su di un tema di concorso. Period. Mat., IV. s. 20, 40—54 (1940).

Algebraische und projektive Behandlung der Lemniskate und Berechnung einiger an ihr konstruierbaren Flächenstücke.

Harald Geppert (Berlin).

Fano, Gino: Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale. Comment. math. helv. 12, 172—190 (1940).

Unter den Kurven der Ordnung  $2n$ , die eine ebene allgemeine Kurve 5. Ordnung  $C^5$  in allen Treffpunkten berühren, d. h. mit ihr  $5n$  Berührungspunkte gemein haben, untersucht Verf. die Quartiken  $C^4$ . Er beginnt mit der Feststellung, daß diese sich auf  $2^{2 \cdot 6} = 4096$  verschiedene Systeme verteilen, von denen jedes die Dimension 4 hat, mit Ausnahme des Systems der doppelten Kegelschnitte, das von der Dimension 5 ist; unter diesen Systemen gibt es 2015 derart, daß jedes derselben ein System von Kegelschnitten enthält, die die  $C^5$  in allen Treffpunkten berühren, vermehrt um  $\infty^2$  doppelt gezählte Geraden. Verf. bezeichnet diese Systeme als vom ersten Typ, während die übrigen 2080 Systeme als zweiter Typ bezeichnet werden; zu keinem von beiden wird das System der doppelten Kegelschnitte gezählt. — Auf einige Betrachtungen über die Scharen der Berührungspunkte der  $C^4$  mit der  $C^5$  und die Zahl (nämlich 496) der  $C^2$ , die in jedem der vorgenannten Systeme enthalten sind, entwickelt Verf. eine interessante Erzeugung dieser Systeme, die sie zu gewissen Figuren des  $S_3$  und des  $S_4$  in Beziehung setzt. — Es bezeichne  $V^3$  eine kubische Hyperfläche des  $S_4$  und  $r$  eine auf ihr gelegene Gerade; man betrachtet die  $\infty^2$  Kegelschnitte  $\gamma$ , die auf der  $V^3$  von den durch  $r$  gehenden Ebenen ausgeschnitten werden. Bezieht man deren System projektiv auf die Punkte einer Ebene  $\alpha$ , so ist der Ort derjenigen Punkte von  $\alpha$ , die den in Geradenpaare zerfallenden  $\gamma$  entspricht, eine allgemeine  $C^5$ . Die  $\infty^4$  Hyperebenenchnitte  $F^3$  der  $V^3$ , die die Kurven  $\gamma$  zweifach schneiden, sind auf die Doppelebene  $\alpha$  abbildbar, wobei die Übergangskurven  $C^4$  sind, die die  $C^5$  in allen Treffpunkten berühren und ein System des ersten Typs bilden. Umgekehrt kann man von jedem System des ersten Typs aus zu einer geeigneten  $V^3$  des  $S_4$  gelangen, von der aus man in der geschilderten Weise das Ausgangssystem erhält. Die Systeme des zweiten Typs hängen hingegen mit denjenigen Involutionen zusammen, die auf den Ebenen des  $S_3$  von der bekannten Montesanoschen Kegelschnittkongruenz ausgeschnitten werden; letztere besteht aus den Schnittkurven der  $\infty^2$  kubischen Flächen, die durch eine Raumkurve  $C_5^7$  7. Ordnung des Geschlechts 5 hindurchgehen. Bildet man in geeigneter Weise die Kegelschnitte dieser Kongruenz auf die Punkte einer Ebene  $\alpha$  ab, so wird jede weitere Ebene des  $S_3$  mit  $\alpha$  in eine Korrespondenz (2, 1) gebracht, und auf  $\alpha$  entsteht eine Verzweigungskurve 4. Ordnung, die in allen Treffpunkten eine gewisse  $C^5$  berührt und die zusammen mit weiteren analogen  $\infty^3$   $C^4$  ein vierdimensionales System des zweiten Typs bildet. Weitere Betrachtungen des Verf. hängen damit zusammen, daß die vorhin betrachtete  $C_5^7$  als Projektion einer kanonischen  $C_5^6$  des  $S_4$  aufgefaßt werden kann. — Im Laufe der Untersuchung erhält Verf. einige Nebenresultate; ein Teil davon bezieht sich auf gewisse Kubiken, die in allen Treffpunkten eine Quartik berühren, der andere auf die oben erwähnte Montesanosche Kongruenz; schließlich beweist Verf. die Möglichkeit, die linke Seite der Gleichung einer allgemeinen ebenen  $C^n$  als symmetrische Determinante linearer Koordinatenverbindungen zu schreiben, wodurch ein von Hesse (1855) für  $n = 4$  und von Milne (1927) für  $n = 5$  erhaltenes Ergebnis auf beliebige  $n$  erweitert wird. Die Überlegungen des Verf. sind mit Ausnahme gelegentlicher analytischer Betrachtungen durchweg synthetisch

Campedelli (Firenze).

Emch, Arnold: Properties of plane elliptic cubics and pencils of cubics derived by the quadratic transformation. Mh. Math. Phys. 49, 55—63 (1940).

L'A. considera la trasformazione quadratica involutoria  $T$  d'equazioni  $\varrho x'_i = 1/x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), che ha i punti fondamentali  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 1, 0)$ ,  $A_3(0, 0, 1)$  ed i punti uniti  $B_0(1, 1, 1)$ ,  $B_1(-1, 1, 1)$ ,  $B_2(1, -1, 1)$ ,  $B_3(1, 1, -1)$ . Preso un punto  $A(a_1, a_2, a_3)$



ed il fascio di rette per esso, su ogni retta del fascio vi è una coppia di punti coniugati in  $T$ ; la totalità di queste coppie sta sulla cubica ellittica:

$$(1) \quad a_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + a_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + a_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

che si dice „isologa“ del punto  $A$ . — Le cubiche (1) costituiscono una rete  $|L|$ , che ha i punti  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ed i punti  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) come punti base. Ogni cubica di  $|L|$  è trasformata in sè dalla  $T$ . — L'invariante assoluto della (1) è una funzione simmetrica di  $a_1, a_2, a_3$ , che si esprime come quoziente di due polinomi di grado 12. I punti, per i quali le cubiche isologhe hanno lo stesso invariante, stanno su una curva spezzata in 6 coniche: una conica è determinata dai punti  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) e da uno dei punti di coordinate  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(a_1, a_3, a_2)$ ,  $(a_2, a_1, a_3)$ ,  $(a_2, a_3, a_1)$ ,  $(a_3, a_1, a_2)$ ,  $(a_3, a_2, a_1)$ . — La curva jacobiana della  $|L|$  è costituita dai 6 lati del quadrilatero, che ha i vertici  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). — Per una coppia di punti coniugati in  $T$  passa un fascio di cubiche di  $|L|$ , nel quale vi sono 6 cubiche spezzate in una retta ed in una conica. L'A. studia alcune proprietà della configurazione costituita dai 12 punti doppi di tali 6 cubiche.

Conforto (Rom).

**Longhi, Ambrogio:** Sulle involuzioni di ordine  $n$  e specie  $n-1$  in un campo binario. Comment. math. helv. 12, 164—171 (1940).

Einige Eigenschaften einer Linearschar  $g_n^{n-1} = I$  auf einem rationalen Träger; als solcher dient am besten in den Beweisen eine rationale normale  $C^n$ . Ein „Hauptpaar“ von  $I$  besteht aus zwei Punkten  $P, P'$ , so daß beide Gruppen  $P + (n-1)P'$  und  $P' + (n-1)P$  der Involution  $I$  angehören.  $I$  enthält  $\binom{n-1}{2}$  solche Hauptpaare.

Jedem Punkte  $P$  entsprechen  $n-1$  Punkte  $P_1 P_2 \dots P_{n-1}$ , so daß die Gruppen  $P + (n-1)P_i$  der Involution  $I$  angehören; bei veränderlichem  $P$  beschreibt die Gruppe  $PP_1 \dots P_{n-1}$  eine algebraische  $\gamma_n^1$  vom Index 2; je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, enthält  $I$  die  $\gamma_n^1$  vollständig oder hat  $I$  mit  $\gamma_n^1$  nur zwei Gruppen gemein. Es folgen verschiedene Sätze über die Hauptpaare von  $I$  und über die Schar  $\gamma_n^1$ . — Ist der Träger von  $I$  eine rationale  $C^n$  eines Raumes  $S_{n-1}$ , so liefern die Hauptpaare von  $I$  die sog. „Hauptsehnen“ der  $C^n$ ; im Falle eines geraden  $n$  erhält man nochmals eine bekannte Ausdehnung eines Satzes von Bertini und Laguerre (dies. Zbl. 7, 127), dem im Falle eines ungeraden  $n$  ein neuer Satz entspricht. — Eine andere Gestalt erhalten die gefundenen Sätze, wenn  $I$  diejenige  $g_n^{n-1}$  ist, die ein Linearsystem von Hyperflächen auf einer rationalen  $C^m$  eines Raumes  $S_r$  ausscheidet. — Es wird schließlich der Fall besonders betrachtet, wo  $C^m$  einen Knotenpunkt besitzt. *Togliatti*.

**Cherubino, Salvatore:** Qualche applicazione dell'indice di Kronecker alle corrispondenze algebriche tra curve. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 1—11 (1940).

Eine algebraische Korrespondenz zwischen zwei Kurven gleichen Geschlechtes möge die  $2p$  Basiszykel der einen Riemannschen Fläche in linear unabhängige Zyklen der anderen transformieren. Nun wird behauptet, daß dabei zwei sich nicht schneidende Zyklen  $\gamma_r$  und  $\gamma_s$  wieder in zwei Zyklen  $\gamma'_r$  und  $\gamma'_s$  mit der Schnittpunktzahl Null transformiert werden. Aus dieser falschen Behauptung werden weitere Schlußfolgerungen gezogen; z. B. wird geschlossen, daß eine gewisse  $2p$ -reihige Matrix  $TT^*$  Diagonalform hat, was ebenfalls nicht stimmt.

van der Waerden (Leipzig).

**Haenzel, G.:** Geometrie und Wellenmechanik. Die Operatoren der Diracschen Wellengleichung, ihre geometrische Struktur und Bedeutung. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 49, Abt. 1, 215—242 (1940).

Nach einem eingehenden Bericht über die Symmetrisierung der Diracschen Wellengleichung für Einelektron- bzw. Zweielektronensysteme, der sich eng an die Eddingtonsche Darstellung anschließt, wendet sich Verf. der Frage nach der Struktur der 6 zeitartigen und 10 (einschließlich der Identität) raumartigen Linearisatoren  $E_{ik}$  zu. Bekanntlich weist das System dieser 16 Operatoren eine gewisse Isomorphie mit den 16 automorphen Kollineationen einer Kummerschen Fläche auf. Sind  $\Gamma_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) die zu dieser Fläche gehörigen linearen Strahlenkomplexe, von denen  $i = 1, 2, 3$



rechtsgewunden, die übrigen aber linksgewunden sind, so ordnet Verf. jedem Operator  $E_{ik}$  (ausschließlich der Identität) des Eielektronensystems das Produkt  $E_{ik} = \Gamma_i \Gamma_k$  zu. Auf diese Weise entsprechen die raumartigen bzw. zeitartigen  $E_{ik}$  den hyperbolischen bzw. elliptischen Schnittkongruenzen von  $\Gamma_i, \Gamma_k$ . Die Einteilung in Pentaden, Tetraden usw. der  $E_{ik}$  geht auf anschauliche Verhältnisse im Raume der  $\Gamma_i$  zurück. Durch Übergang von diesem Raum zu einer Doppelebene der Kummerschen Fläche sind die Ver sinnlichungen der  $E_{ik}$  noch einfacher aus der Figur eines Pascalschen Sechsecks zu entnehmen. Vermöge zweier zueinander in bezug auf einen Punkt symmetrisch gelegener Pascalfiguren kann man die Struktur der Operatoren eines Zweielektronensystems beherrschen. — Eine weitere geometrische Deutung der  $E_{ik}$  entsteht, wenn man statt der linearen Komplexe  $\Gamma_i$  die quadratischen Kongruenzen  $C_i^2$  ( $i = 0, \dots, 5$ ) zugrunde legt, die aus den Doppeltangenten der Kummerschen Fläche bestehen. Dann ist die biquadratische Regelfläche  $R_{ik}$ , Schnitt von  $C_i$  und  $\Gamma_k$ , das Bild des Operators  $E_{ik}$ .

D. Barbilian (București).

Barrau, J. A.: Eine Abbildung der Ähnlichkeitstransformationen der Ebene auf die Punkte des vierdimensionalen Raumes. *Mathematica*, Zutphen B 8, 97—121 (1939) [Holländisch].

Verf. betrachtet die Ähnlichkeitstransformationen der Ebene und bildet diejenige Lage einer veränderlichen Ebene, welche aus der Transformation  $x' = cx - sy + a$ ,  $y' = sx + cy + b$  entsteht, auf den Punkt  $P$  des vierdimensionalen Raumes mit den homogenen orthogonalen Koordinaten  $(c, s, a, b, h)$  ab. Die Punkte der beweglichen Ebene stimmen dann je überein mit einer Geraden einer linearen elliptischen Kongruenz. Die feste Ebene wird mit der Ebene  $OAB$  des Koordinatensystems identifiziert. Mit einer Bildkurve  $p$  in  $R_4$  stimmt eine Schar von Ähnlichkeitstransformationen überein; die Bahnkurven erhält man, indem man  $p$  aus den  $\infty^2$  Strahlen der Kongruenz auf  $OAB$  projiziert. Ist  $p$  eine Gerade, so bekommt man eine Schar mit geraden Bahnkurven; die bezügliche „Bewegung“ hat der Verf. eine „Geradrotation“ genannt. Er betrachtet weiter Ebenen und dreidimensionale Räume im Bildraum, ist imstande, mittels seiner Abbildung Konstruktionen in der „Kinematik der Ähnlichkeitstransformationen“ auszuführen, und gibt Beiträge zur Liniengeometrie in  $R_4$ , welche offenbar mit der Geometrie der Geradrotationen übereinstimmt. O. Bottema (Daventer).

Speitkamp, Fritz: Ein Gegenstück zu Blaschkes „Ebene Kinematik“. Bonn: Diss. 1939. 45 S.

Man kann jede Bewegung der euklidischen Ebene nach E. Study beschreiben mittels vier homogener Parameter  $\alpha_i$ :

$$(\alpha_0^2 + \alpha_3^2) \bar{x} = (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) x + 2\alpha_0\alpha_3 y + 2(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2),$$

$$(\alpha_0^2 + \alpha_3^2) \bar{y} = -2\alpha_0\alpha_3 x + (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) y + 2(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3).$$

Deutet man diese Parameter  $\alpha_i$  als homogene projektive Punktkoordinaten in einem  $R_3$ , so erhält man eine zuerst von W. Blaschke [*Z. Math. Physik* 60, 61—91 (1911)] eingehend untersuchte Abbildung der ebenen Bewegungen auf die Punkte des Raumes, bei der den Umlegungen dessen Ebenen entsprechen. Dieser Raum erhält durch die Bildmannigfaltigkeit der singulären Bewegungen  $\alpha_0^2 + \alpha_3^2 = 0$  sogenannte „quasielliptische“ Struktur und kann als ein Grenzfall des elliptischen Raumes aufgefaßt werden. — Diese bekannten Verhältnisse werden im ersten Abschnitt der Arbeit kurz auseinandergesetzt. — Man kann aber auch (und dies ist der Grundgedanke der Arbeit) als Parameter der Bewegung die Größen

$$s_1 = \alpha_0, \quad s_2 = \alpha_3, \quad s_{11} = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2, \quad s_{22} = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3$$

wählen, die pseudohomogen sind mit folgender Äquivalenzrelation:

$$(s_1, s_2; s_{11}, s_{22}) \sim (\varrho s_1, \varrho s_2; \varrho^2 s_{11}, \varrho^2 s_{22}), \quad \varrho \neq 0.$$

Man kann daher die fünf im gewöhnlichen Sinne homogenen Größen:

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = s_1^2 + s_2^2 : 2s_{11} : 2s_{22} : 2s_1s_2 : s_1^2 - s_2^2$$

in einem  $R_4$  als projektive Punktkoordinaten deuten, zwischen denen offenbar die



quadratische Relation  $X_0^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0$  besteht. Man hat so die Bewegungen der Ebene abgebildet auf die Punkte einer zweifach singulären  $M_3^2$  des  $R_4$ . Die singulären Bewegungen übertragen sich auch hier auf die Punkte zweier ausgezeichnete erzeugender Ebenen.  $X_0 = 0$ ,  $X_3 \pm iX_4 = 0$  der  $M_3^2$ . Maßgebend für die ebene Kinematik ist nun bei ihrer Deutung auf  $M_3^2$  eine gemischte siebenparametrische Gruppe von projektiven Automorphismen. Ihr gegenüber werden die einfachsten Gebilde auf  $M_3^2$  klassifiziert. Die entsprechenden Figuren im quasielliptischen Raum werden angegeben. Waren z. B. den Umlegungen dort die Ebenen zugeordnet, so entsprechen ihnen auf  $M_3^2$  gewisse geradlinige Flächen dritter Ordnung, die als Planarflächen bezeichnet und genauer studiert werden. Das Analogon aber der Geraden des quasielliptischen Raumes ist die sogenannte Hauptparabel auf  $M_3^2$ . — Die von Geraden und Hauptparabeln verschiedenen Kurven auf  $M_3^2$  bestimmen in der Ebene eindeutig zwangsläufige Bewegungen. Als Beispiele hierfür werden einige einfache Geradföhrungen und die allgemeinste Kreisföhrung behandelt. *K. Strubecker*.

**Rosenfeldt, Kurt:** Über algebraische Flächen mit Büscheln elliptischer Kurven. *J. reine angew. Math.* 182, 51—53 (1940).

Mittels der von H. W. E. Jung entwickelten Theorie der algebraischen Flächen (Algebraische Flächen. Hannover 1925) föhrt Verf. die birationale Abbildung derjenigen Flächen, die ein lineares Büschel elliptischer Kurven mit wenigstens einem einfachen oder doppelten Basispunkt tragen, auf Doppel Ebenen durch. Letztere sind bekanntlich entweder rational oder halbrational, d. h. Regelflächen äquivalent; dies zeigt Verf. durch den Nachweis  $P_i = 0$  ( $i = 2, 3 \dots$ ) für die erhaltenen Doppel Ebenen.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Godeaux, Lucien:** Sur les surfaces normales de genres un de l'espace à cinq dimensions possédant huit points doubles. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 8, 427—433 (1939).

Eine algebraische Normalfläche  $F$  mit  $p_a = p_g = P_i = 1$  ist bekanntlich dann und nur dann das Bild einer Involution zweiter Ordnung auf einer Trägerfläche, deren sämtliche Geschlechter gleich Eins sind, wenn sie 8 konische Doppelpunkte besitzt und unter den durch diese gehenden Hyperquadriken solche vorhanden sind, die  $F$  in jedem Treffpunkt berühren. Diese Bedingungen sind voneinander unabhängig, wenn  $F$  einem  $S_3$  oder  $S_4$  angehört; hier wird dasselbe für die im  $S_5$  liegenden  $F = F_8$  nachgewiesen.  $F$  bildet dann 29 Involutionen vom obengenannten Typ ab.  $F_8$  läßt sich birational in eine  $F_4$  des  $S_3$  abbilden, die 8 paarweise windschiefe Geraden  $g$  eines linearen Komplexes enthält;  $F_4$  trägt 8 Büschel elliptischer  $C_5$ ; die  $C_5$  eines Büschels haben 7 von den Geraden  $g$  zu Trisekanten, während sie die 8. nur in einem Punkt treffen.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Pompili, Giuseppe:** Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli diedrici. *Rend. Semin. mat. Roma*, IV. s. 3, 194—214 (1939).

Verf. untersucht die mehrfachen Ebenen mit einer dyedrischen Monodromiegruppe und die Flächen  $F$ , die auf diese Ebenen abgebildet werden können. Eine dyedrische (transitive) Gruppe  $G$  der Ordnung  $2n$  kann, als Substitutionsgruppe, über  $2n$  oder  $n$  Buchstaben wirken: im ersten Falle a) hat  $G$  als Erzeugende die Substitutionen  $T = (z_1 z_3 \dots z_{2n-1}) (z_2 z_4 \dots z_{2n})$  und  $S = (z_1 z_2 z_3 \dots z_{2n-1} z_{2n})$ ; im zweiten Falle b) die Substitutionen  $T = (z_1 z_2 \dots z_n)$  und  $S = (z_1 z_2 z_3 \dots z_r \dots z_n)$ . Folglich kann eine dyedrische mehrfache Ebene, mit Monodromiegruppe der Ordnung  $2n$ , entweder eine  $2n$ -fache oder eine  $n$ -fache Ebene sein. — Im Falle a) kann als projektives Bild der Fläche  $F$  die Fläche:  $(A) z^{2n} - q_{nd} z^n + p_{nd}^2 = 0$  angenommen werden, die eben durch Projektion aus dem Fernpunkte der  $z$ -Achse  $Z_\infty$  eine  $2n$ -fache dyedrische Ebene ergibt:  $q_{nd}$  und  $p_{nd}$  sind dabei Polynome in  $x, y$  der Ordnungen  $nd$  bzw.  $2d$ . Um dies zu beweisen, betrachtet der Verf. eine  $2n$ -fache dyedrische Ebene mit Monodromiegruppe der Ordnung  $2n$ ; einem Punkte dieser Ebene entsprechen  $2n$  Punkte auf  $F$ , deren dritte Koordinaten  $z_1 \dots z_{2n}$  seien. Dann untersucht Verf., wie sich die Größen:

$$\begin{aligned} u_h &= z_1 + \varepsilon^h z_3 + \dots + \varepsilon^{h(n-1)} z_{2n-1}, \\ v_h &= z_2 + \varepsilon^{h(n-1)} z_4 + \dots + \varepsilon^h z_{2n} \end{aligned} \quad (h = 1, \dots, n; \varepsilon^n = 1)$$



durch  $S$  und  $T$  transformieren, woraus sich leicht der eben erwähnte Schluß ziehen läßt. Analog beweist man, daß im Falle b) die Fläche

$$(B') \quad z^n - n p_{2,d} z^{n-2} + c_2 p_{2,d}^2 z^{n-4} + \dots + c_r p_{2,d}^r z^{n-2r} + \dots + c_m p_{2,d}^m z - q_{n,d} = 0,$$

falls  $n = 2m + 1$  oder

$$(B'') \quad z^n - n p_{2,d} z^{n-2} + \dots + c_r p_{2,d}^r z^{n-2r} + \dots + c_{m-1} p_{2,d}^{m-1} z^2 + (-1)^m 2 p_{2,d}^m - q_{n,d} = 0,$$

falls  $n = 2m$ , sich als projektives Bild der  $F$  annehmen läßt. Setzt man in  $(B')$ ,  $(B'')$   $z = u + v$ ,  $p_{2,d} = uv$ ,  $q_{n,d} = u^n + v^n$ , so muß eine Identität in  $u, v$  entstehen, woraus sich die Bedeutung der Zahlen  $c_2, \dots, c_m$  ergibt. — Sind  $p$  und  $q$  allgemeine Polynome, so folgt durch Untersuchung der Singularität der Fläche  $(A)$  in  $Z_\infty$ , daß die Verzweigungskurve der  $2n$ -fachen Ebene eine  $n$ -mal gezählte Kurve  $\varphi = 0$  ist, für die  $q_{n,d}^2 - 4 p_{2,d}^n = a^2 \varphi$ , wo das Polynom  $a$  prim mit  $p$  und  $q$  ist und eine gewisse Doppelkurve der  $F$  darstellt. Die Verzweigungskurve im Falle b) ergibt sich leicht, da die Flächen  $(A)$  als Galoissche Resolventen der Flächen  $(B')$ ,  $(B'')$  betrachtet werden können. Ist nämlich  $n = 2m + 1$ , so ist die Verzweigungskurve die  $m$ -mal gezählte Kurve  $\varphi = 0$ . Ist  $n = 2m$ , so ist die Verzweigungskurve  $\varphi_1^m \varphi_2^{m-1} = 0$  mit  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$  und  $q + 2 p^m = b^2 \varphi_1$ ,  $q - 2 p^m = c^2 \varphi_2$ . — Die Fläche  $(A)$  kann auf eine zweimal gezählte Fläche  $(B')$  oder  $(B'')$  abgebildet werden: ein Punkt von  $(B')$  oder  $(B'')$  entsteht aus zwei Punkten, die in einer der  $n$  Involutionen zweiter Ordnung, die auf  $(A)$  existieren, konjugiert sind. Verf. macht davon eine Anwendung, indem er eine Fläche  $(A)$  konstruiert, deren kanonisches System mit einer rationalen Involution 6. Ordnung zusammengesetzt ist. Für diese Fläche ist  $p_r = 6$ ,  $p^{(1)} = 25$ .

Conforto (Rom).

Godeaux, Lucien: Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 9, 2—11 (1940).

Auf einer algebraischen  $V_r$  sei ein irreduzibles Linearsystem von  $V_{r-1}$  vorgegeben,  $|V_{r-1}|$ ,  $|V_{r-1}''| \dots$  seien seine sukzessiven Adjungierten; existiert dann eine niedrigste Zahl  $p$ , so daß  $|V_{r-1}^{(p)}| = |V_{r-1}|$  ist, so hat die Adjunktion auf  $V_r$  die Periode  $p$  und  $V_r$  besitzt keine  $1, 2, \dots, (p-1)$ -fach kanonischen Mannigfaltigkeiten, aber eine  $p$ -fach kanonische Mannigfaltigkeit der Ordnung Null. Ist  $r = 2$  und handelt es sich um eine reguläre Fläche ( $p_a = p_g$ ), so führt eine leichte Betrachtung der Dimensionen der Systeme zur Aussage, daß nur  $p = 1$  oder  $2$  sein kann; bei einer vollständig regulären  $V_3$  kann  $p$  nur  $1$  sein, d. h. jedes lineare Flächensystem auf  $V_3$  ist dann mit seinem Adjungierten identisch. Man kann die Definition der Periode erweitern: Auf der regulären  $V_3$  sei  $|F|$  ein irreduzibles Linearsystem von Flächen mit  $p_a > 3$  und  $|F'| = |F_1 + \Delta_1|$ ,  $|F'_1| = |F_2 + \Delta_2|, \dots, |F'_{p-2}| = |F_{p-1} + \Delta_{p-1}|$ ,  $|F'_{p-1}| = |F|$ , wobei die festen Bestandteile  $\Delta_i$  von  $F'_{i-1}$  Fundamentalmannigfaltigkeiten von  $|F|$  bedeuten, dann hat die Adjunktion auf  $V_3$  die Periode  $p$ , und das  $p$ -fach kanonische System von  $V_3$  besteht aus  $|\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{p-1}|$ . In diese Begriffsbildung fügen sich die früher vom Verf. gefundenen  $V_3$  mit  $P_g = 0$ ,  $P_2 = 1$ ,  $P_3 = 0, \dots$  bzw.  $P_g = P_2 = 0$ ,  $P_3 = 1$ ,  $P_4 = 0, \dots$  ein, die sich als Bilder von Involutionen auf solchen  $V_3$  gewinnen lassen, deren sämtliche Geschlechter  $1$  sind [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 93—101 (1937); dies. Zbl. 16, 371. Bull. Sci. math., II. s. 61, 82—96 (1937); dies. Zbl. 17, 129]].

Harald Geppert (Berlin).

Shreve, Darrell R.: On a certain class of symmetric hypersurfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 948—951 (1939).

Semplici osservazioni sopra le ipersuperficie d'ordine  $n$  di uno  $S_r(x_1 x_2 \dots x_{r+1})$ , che sono invarianti rispetto al gruppo totale delle permutazioni sopra  $r + 2$  coordinate omogenee  $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}, x_{r+2}$  con  $\sum_{i=1}^{r+2} x_i = 0$ . In particolare l'A. si occupa, anche dal punto di vista della realtà, delle ipersuperficie d'equazione  $\sum_{i=1}^{r+2} x_i^n = 0$  con  $n$  numero dispari, studiandone i punti doppi ed i punti analoghi ai punti di Eckhardt. Conforto.

Eger, Max: Sur la jacobienne d'un système de Pfaff. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 82—84 (1939).

Etant donné, sur une variété algébrique  $V_n$  sans singularités, un système de Pfaff de  $\lambda + 1$  équations ( $\lambda \leq n - 1$ ) ( $1$ )  $w_0 = 0, w_1 = 0, \dots, w_\lambda = 0$ , où  $w_i$  sont des formes rationnelles du point de  $V_n$ , on appelle variété jacobienne de  $(1)$  le lieu des



points où les  $w_i$  ne sont pas linéairement indépendantes. Une forme  $w = \sum a_i w_i$  est dite permise, si toute variété polaire  $\Omega$  à  $n$  dimensions de  $w$ , est une intégrale de  $w = 0$ . Si en un point  $O$  de  $\Omega$ , l'espace linéaire tangent est  $x^1 = 0$ ,  $w$  peut s'écrire, au voisinage de  $O$ , sous la forme (2)  $w = \frac{1}{x_1^k} (K_1 dx^1 + x^1 \psi)$  où  $\psi$  est une forme régulière en  $O$  et ne contient pas  $dx^1$ . (2) peut être étendue au cas où  $\Omega$  est l'intersection de  $p$  hypersurfaces polaires non tangentes. On montre que l'intersection de la variété jacobienne de  $w$  et d'une forme différentielle  $F$  de degré  $k$ , avec  $\Omega$ , coïncide avec la jacobienne de  $F$  et  $\Omega$ . G. Vranceanu (București).

Todd, J. A.: Invariant and covariant systems on an algebraic variety. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 199—230 (1940).

Zweck dieser Abhandlung ist zunächst (§ 3) die Einführung einer Reihe birational invarianter Äquivalenzsysteme  $Y_h$  auf einer algebraischen  $V_d$  eines  $r$ -dimensionalen Raumes  $S_r$ ; ebenso wie die kanonischen Systeme  $X_{d-k}$  der verschiedenen Dimensionen  $d-k$  aus den  $M_{d-k+i}$  ( $i = 0, \dots, k$ ), d. h. den Orten der Punkte von  $V_d$ , deren Tangential- $S_d$  einen gegebenen  $S_{r-d+k-i-2}$  in einem  $S_{k-i-1}$  schneiden, erhalten werden können, so können die Systeme  $Y_{d-k}$  aus den  $N_{d-k+i}$  konstruiert werden, die Orte der Punkte von  $V_d$  sind, deren Tangential- $S_d$  einen gegebenen  $S_{r-d-k-i}$  in einem Punkt schneiden. Die Systeme  $X$  und  $Y$  sind durch folgende Relation verbunden:  $\sum (-1)^i (X_{d-k+i} \cdot Y_{d-i}) \equiv 0$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ), wo  $(X_{d-k+i} \cdot Y_{d-i})$  eine Schnittmännigfaltigkeit bedeutet; die Systeme  $Y$  können durch die  $X$  ausgedrückt werden; man hat z. B.  $Y_{d-1} \equiv X_{d-1}$ ,  $Y_{d-2} \equiv (X_{d-1}^2 - X_{d-2}, \dots$ , und dies zeigt die Invarianz der Systeme  $Y$ , welche im folgenden eine wichtige Rolle spielen. — Im § 4 werden eine auf einer  $V_r$  liegende  $V_d$  und die kovarianten Systeme der  $V_d$  und  $V_r$  betrachtet; als solche erscheinen z. B. die invarianten Systeme von  $V_d$  und ihre Schnitte mit denjenigen von  $V_r$ . Gewisse lineare Kombinationen jener Schnittsysteme liefern folgende neuen kovarianten Systeme:

$$\begin{aligned} X_k[V_d, V_r] &= \sum (-1)^i (X_{k+i}[V_d] \cdot Y_{r-i}[V_r]); \\ Y_k[V_d, V_r] &= \sum (-1)^i (Y_{k+i}[V_d] \cdot X_{r-i}[V_r]); \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, d-k)$$

sie besitzen folgende Eigenschaft: Die Schnitte von  $X_k[V_d, V_r]$  oder  $Y_k[V_d, V_r]$  mit einer auf  $V_r$  liegenden  $V_{r-1}$ , die  $V_d$  in  $V_{d-1}$  schneidet, fallen mit  $X_{k-1}[V_{d-1}, V_{r-1}]$  oder  $Y_{k-1}[V_{d-1}, V_{r-1}]$  zusammen. — Im § 5 wird die  $F_{d-k}$  untersucht, die Ort der Punkte  $P$  von  $V_d$  ist, wo eine Gerade existiert, die  $V_d$  in  $P$   $(k+1)$ -punktig berührt und durch einen gegebenen allgemeinen Punkt  $O$  hindurchgeht. — Im § 6 wird der Ort  $\Gamma_h$  ( $h = 2d - r$ ,  $2d \geq r$ ) der uneigentlichen Doppelpunkte von  $V_d$  durch die Systeme  $Y_h$  des § 3 und durch die Hyperebenenchnitte von  $V_d$  ausgedrückt. — Die so erhaltene Formel wird dann so umgestaltet, daß sie auch im Falle einer auf einer  $V_r$  liegenden  $V_d$  noch gültig bleibt (§ 7). — In der ganzen Abhandlung hat man ziemlich komplizierte Rechnungen algebraischen Charakters zu entwickeln. Zum besseren Verständnis des algebraischen Teils der Untersuchung läßt Verf. einen ersten Paragraphen vorangehen, wo verschiedene Identitäten und Formeln in einem beliebigen kommutativen Ring ausgerechnet werden. Sie finden ihre geometrische Deutung schon im § 2, wo der sogenannte „Äquivalenzring“ einer algebraischen  $V_d$  eingeführt wird; es handelt sich um einen kommutativen Ring, dessen Elemente geordnete Gruppen  $[x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d)}]$  bedeuten, wo die  $x^{(k)}$  Äquivalenzsysteme der Dimension  $k$  sind, und wo die Operationen der Summe und des Produkts folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} [x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d)}] + [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(d)}] &= [x^{(0)} + y^{(0)}, \dots, x^{(d)} + y^{(d)}]; \\ [x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d)}] \cdot [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(d)}] &= [t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(d)}], \end{aligned}$$

wo  $t^{(k)} = \sum (x^{(p)} \cdot x^{(q)})$  und  $p + q = d + k$ .

E. G. Togliatti (Genova).

Paxia, Salvatore: Sulle varietà iperalgebriche nell'algebra dei numeri tricomplessi. Atti Accad. Gioenia Cattania, VI. s. 2, mem. 10, 1—25 (1937).



## Differentialgeometrie:

Wedemeyer, A.: Die Tangente der Azimutgleiche. Z. Vermessungswes., Stuttg. 69, 188—189 (1940).

Die Konstruktion der Tangente an die genannte sphärische Kurve wird schnell und übersichtlich durch reine Winkelbeziehungen gewonnen, indem die Verhältnisse der Ebene analog auf die Kugel übertragen werden. In der Note finden sich Literaturhinweise auf ähnliche Untersuchungen des Verf. U. Graf.

Turrière, Émile: Une nouvelle courbe de transition pour les raccordements progressifs: La radioïde pseudo-elliptique. Bull. Soc. Math. France 67, 62—99 (1939).

Für das im Feldmeßwesen, Straßen- und Eisenbahnbau oft behandelte Problem des Übergangsbogens wird eine neue Lösung vorgeschlagen: die pseudoelliptische Radioïde, d. h. eine Kurve mit der Gleichungsform  $\operatorname{tg} \frac{x-y}{k} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{k}$ , ( $k$  konstant), bezogen auf ein

rechtwinkliges  $x, y$ -System, für das die  $x$ -Achse die geradlinige Trasse und der Ursprung der Anfangspunkt des Übergangsbogens ist. Die vorgeschlagene Kurve hat den Vorzug, daß sie sich auf elementare Weise rektifizieren läßt. Alle für die Praxis erforderlichen Absteckdaten werden hergeleitet und an mehreren Beispielen im Vergleich mit den anderen Lösungen des Übergangsbogens erläutert. Dem ausführlichen Literaturverzeichnis ist noch hinzuzufügen: Lachmann und Rothe, Zur Konstruktion des Übergangsbogens für Eisenbahngleise. Z. angew. Math. Mech. 2, 45—57 (1922), und Schramm, Der vollkommene Gleisbogen. Seine Gestaltung als Kurve mit stetigem Krümmungsverlauf. Berlin 1931. U. Graf.

Bonea, I.: Einige Bemerkungen über die Bestimmung der Schnittebene in der stereographischen Projektion. Bull. sci. Ecole polytechn. Timişoara 9, 115—126 (1939) [Rumänisch].

Il s'agit d'une projection stéréographique sur un plan coupant la sphère, le centre de projection se trouvant en l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire. L'aut. se propose de déterminer ce plan de manière que dans la projection d'un cercle de centre opposé au centre de projection, les erreurs de la déformation linéaire remplissent certaines conditions. Application à la construction de la carte géographique de la Roumanie. T. Popoviciu (Cernăuți).

Hristow, Wl. K.: Reihenentwicklungen für die ebene Meridiankonvergenz der stereographischen Projektion. Z. Vermessungswes., Stuttg. 69, 186—188 (1940).

Verf. gibt eine einfache Herleitung der ebenen Meridiankonvergenz der stereographischen Abbildung mittels Doppelreihen, die nach steigenden Potenzen a) des geographischen Breitenunterschiedes und des geographischen Längenunterschiedes, b) der ebenen rechtwinkligen Koordinaten fortschreiten. Glieder fünfter Ordnung sind vernachlässigt. Schmehl (Potsdam).

Ansermet, A.: L'emploi en géodésie de coordonnées polaires conformes. Schweiz. Z. Vermessungswes. 37, 235—240 (1939).

Sollen verschiedene konforme Abbildungen der Kugel oder des Ellipsoids in der Ebene miteinander verglichen werden, so erweist sich die gebräuchliche Darstellung mit Verwendung rechtwinkliger Koordinaten als wenig geeignet. Hingegen ist es verhältnismäßig leicht, eine derartige Vergleichung mit Hilfe von Polarkoordinaten vorzunehmen; sie läuft im wesentlichen auf die Untersuchung kleiner Zusatzglieder hinaus, deren geometrische Deutung in einfacher Weise möglich ist. Vergrößerungsverhältnis und Meridiankonvergenz werden gesondert behandelt.

H. Schmehl (Potsdam).

Geissler, Johannes: Beitrag zur Theorie doppelquadratischer Leitgleichungen von ebenen Berührungstransformationen: Singularitäten der Zerfallskurven. Dresden: Diss. 1939. 39 S.

Verf. schreibt die doppelquadratische Leitgleichung einer ebenen Berührungstransformation in der Form

$$(1) \quad \Omega(x/y) \equiv \sum p_{ik}(x) y_i y_k \equiv \sum q_{ik}(y) x_i x_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Man könnte schreiben  $\Omega \equiv \sum a_{ik}^m x_i x_k y_i y_m$ , wobei die  $a$  sowohl bezüglich der oberen wie der unteren Indizes symmetrisch sind; Verf. zieht es jedoch vor, die Doppelindizes zu vermeiden und an Stelle von  $a_{ik}^{11}, a_{ik}^{22}, a_{ik}^{33}, a_{ik}^{31}, a_{ik}^{12}, a_{ik}^{23}$  zu schreiben  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, f_{ik}, g_{ik}, h_{ik}$ . Vermöge (1) entspricht dem Punkt  $x_1^0 : x_2^0 : x_3^0$  ( $y_1^0 : y_2^0 : y_3^0$ ) der Ebene I (II) der Kegelschnitt  $\Omega(x^0/y) = 0$  ( $\Omega(x/y^0) = 0$ ). Entartete Kegelschnitte (also Geradenpaare im allgemeinen) sind den Punkten der Zerfallskurven  $X(x) \equiv |p_{ik}(x)| = 0$  und  $Y(y) \equiv |q_{ik}(y)| = 0$  zugeordnet. Wenn  $X \equiv 0$  bzw.  $Y \equiv 0$ , dann ist jedem Punkt der Ebene I bzw. II ein Ge-



radenpaar zugeordnet. — Die Größen  $X$  und  $Y$  sind homogene Formen 6. Grades mit 28 Gliedern, welche man durch wiederholte Aufspaltung der Determinanten  $|p_{ik}|$  und  $|q_{ik}|$  erhält. Die Untersuchung der allgemeinsten Zerfallskurve ist somit aussichtslos. Verf. beschränkt sich daher auf Vereinfachungen, und zwar solche, bei denen die Veränderlichen  $x$  und  $y$  symmetrisch behandelt werden. Zunächst sollen in I und II die Zerfallskurven durch die Ecken der Koordinatendreiecke gehen, und es soll in jeder Ebene der Doppelpunkt des einer Ecke zugeordneten entarteten Kegelschnittes der mit dieser Ecke der anderen Ebene gleichlautende Eckpunkt sein. Diese Forderungen sind bei Verwendung doppelter Indizes gleichbedeutend mit den Beziehungen (2)  $a_{ii}^{kk} = a_{ii}^{kk} = 0$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Die Punkte 1:0:0, 0:1:0, 0:0:1 sind dann in I und II zugleich Doppelpunkte der Zerfallskurven  $X = 0$  und  $Y = 0$ . — Sodann werden die zwei Fälle betrachtet, wo in beiden Ebenen die drei Paare von Doppelpunktstangenten der Zerfallskurven entweder mit den betreffenden Seitenpaaren des Dreiecks der Doppelpunkte zusammenfallen oder sie harmonisch trennen. Wenn die analytischen Bedingungen für beide Fälle zusammentreffen, sind die Ecken des Koordinatendreiecks dreifache Punkte der Zerfallskurven, und die Bedingungen hierfür lassen sich zusammenfassen in der Gleichung

$$(3) \quad (a_{11}^{22} a_{11}^{33} - (a_{11}^{23})^2) (a_{22}^{11} a_{22}^{33} - (a_{22}^{13})^2) = 16 (a_{12}^{31} a_{31}^{12} - a_{12}^{13} a_{31}^{21})^2.$$

Sollen außerdem noch die Kegelschnitte  $p_{ii}(x) = 0$  und  $q_{ii}(x) = 0$  in I und II aus den Seiten des Dreiecks der dreifachen Punkte  $X = 0$  und  $Y = 0$  bestehen, dann muß noch gefordert werden, daß

$$(4) \quad a_{ii}^{kk} = 0 \quad (i \neq k; i, k = 1, 2, 3); \quad a_{ii}^{jj}, a_{jj}^{ii} \neq 0 \quad (i, k, j = 1, 2, 3; i \neq k, j; k \neq j).$$

Verf. bevorzugt nun zw. Gruppen von Beziehungen zwischen den  $a_{ii}^{lm}$ , durch deren jede die Forderungen (2) bis (4) erfüllt werden können. Im ersten Falle zerfällt für  $X \equiv 0$ ,  $Y \equiv 0$  die Leitgleichung in ein Produkt von zwei Bilinearformen und somit die durch  $\Omega = 0$  vermittelte Berührungstransformation in zwei Dualitäten, welche zusammen jedem Punkt ein Geradenpaar zuordnen. Bezeichnet man mit  $y^*$  den Doppelpunkt des Geradenpaares in II, welches dem Punkt  $x$  in I entspricht, dann ist der Doppelpunkt des dem Punkt  $y^*$  entsprechenden Geradenpaares in I wiederum der Punkt  $x$ , d. h. es findet eine involutorische Kollineation zwischen den Punkten der Ebenen I und II statt. — Im zweiten der vom Verf. behandelten Fälle bleibt die Leitgleichung auch für  $X \equiv 0$ ,  $Y \equiv 0$  irreduzibel. Die polare Zuordnung der Punkte  $x$  und  $y$  findet statt wie im ersten Fall. Vermittels einer Koordinatentransformation ergibt sich, daß dem Punkt  $x$  ( $y$ ) der Ebene I (II) vermöge  $\Omega = 0$  das Tangentenpaar durch  $y^*$  ( $x^*$ ) an den Kegelschnitt  $\Phi(y/y) = 0$  ( $\Phi(x/x) = 0$ ) zugeordnet wird. Dabei ist

$$\Phi(x/x) \equiv \sum x_i^2 - \sum x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k)$$

$$\text{und } \Omega(x/y) \equiv \Omega(y/x) \equiv \sum (x_i x_k y_j^2 - x_j (-x_j + x_i + x_k) y_i y_k) \quad (i, k, j = 1, 2, 3; i, k \neq j; i \neq k).$$

Im übrigen ist die durch  $\Omega = 0$  vermittelte Transformation keine Berührungstransformation im Lieschen Sinne; es verschwindet überdies auch die Liesche Determinante. Wenn  $X \neq 0$ ,  $Y \neq 0$ , läßt sich  $\Omega$  auf die Form transformieren

$$\Omega(x/y) \equiv \Omega(y/x) \equiv \sum x_i x_k y_j^2 + (x_1 + x_2 + x_3) \sum x_j y_i y_k \quad (i, k, j = 1, 2, 3; i, k \neq j; i \neq k).$$

Zum Schluß untersucht Verf. für  $X \neq 0$ ,  $Y \neq 0$  in den bisher betrachteten Fällen einige Eigenschaften der Punkthauptkurven (d. h. der den Punkten zugeordneten Kegelschnitte) und stellt die Gleichung der Geradenhauptkurven auf, die für einige spezielle Geraden diskutiert wird. Die Geradenhauptkurven entsprechen den Geraden vermöge  $\Omega = 0$  und sind die Einhüllenden der  $\infty^1$  Kegelschnitte, welche den  $\infty^1$  Punkten der Geraden zugeordnet sind. — Durch verschiedene Zeichnungen sucht Verf. die entwickelten Beziehungen anschaulich zu machen.

W. Neumer (Worms).

Kowalewski, Gerhard: Die Ausnahmegruppen der Pickschen Geometrie. Mh. Math. Phys. 49, 64—72 (1940).

Die Cesàrosche natürliche Geometrie läßt sich, wie Pick zuerst gezeigt hat, auf jede transitive  $r$ -gliedrige Gruppe  $G_r$  von Punkttransformationen übertragen, welche die Elemente  $(r-2)$ -ter Ordnung transitiv transformiert. Jede transitive  $G_r$ , die diese Eigenschaft nicht besitzt, ist ähnlich mit der Gruppe der Ableitung  $y^{(r-2)}$ . Der Verf. zeigt, daß man auch für sie eine Art natürlicher Geometrie aufstellen kann, wenn man als Bezugselement  $\mathfrak{B}$  benutzt ein Element  $(r-3)$ -ter Ordnung  $x, y, y', \dots, y^{(r-3)}$  zusammen mit einem Punkte  $x, \bar{y}$ , der dieselbe Abszisse  $x$  hat, wie der Punkt  $x, y$  dieses Elementes. Er führt das wirklich aus für den Fall  $r = 5$ , indem er sich dabei auf das reelle Gebiet beschränkt. Jeder Punkt  $x, y$  bekommt in bezug auf das Element  $\mathfrak{B}$  gewisse Relativkoordinaten, und wenn man  $\mathfrak{B}$  längs eines Kurvenpaares  $K, \bar{K}$  variieren läßt, so daß  $x, y, y', \dots, y^{(r-2)}$  auf  $K$  liegt,  $x, \bar{y}$  auf  $\bar{K}$ , erhält man Identitätsbedingungen, die aussagen, daß  $x, y$  ein fester Punkt ist, und in denen eine infinitesimale Trans-



formation steckt, die der Verf. Schmiegunstransformation nennt. Man kann von natürlichen Gleichungen des Kurvenpaares reden. Die Fixpunkte der Schmiegunstransformation führen zur Betrachtung gewisser Evoluten des Kurvenpaares.

*Engel (Gießen).*

**Humbert, Pierre:** Sur les courbes planes de l'espace attaché à l'opérateur  $A_3$ . C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 590—591 (1939).

Definiert man als Abstand der Punkte  $x, y$  und  $x_0, y_0$  die Größe  $((x-x_0)^3 + (y-y_0)^3)^{1/3}$ , so erhält man drei isotrope Richtungen  $x^3 + y^3 = 0$ . Sind auf einer Geraden drei Punkte  $A_1, A_2, A_3$  gegeben, so heißt ein Punkt  $B$  auf ihr zu  $A$  harmonisch-konjugiert bezüglich  $A_1, A_2, A_3$ , wenn  $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{AA_2} + \frac{1}{AA_3} = \frac{3}{AB}$  ist; entsprechend bei 5 Richtungen. Die Richtung  $\mu'$  heißt zu  $\mu$  orthogonal, wenn sie zu  $\mu$  oder  $\mu$  zu ihr harmonisch-konjugiert bezüglich der isotropen Richtungen ist; es gibt also zu einer Richtung zwei orthogonale. Mit diesen Begriffsbildungen erhalten gewisse Kubiken interessante Eigenschaften; z. B. ist für  $y^3 - 3p^2x = 0$  die eine der beiden Subnormalen konstant und die Kurve besitzt auf der  $x$ -Achse zwei Brennpunkte, d. h. solche mit drei isotropen Tangenten. Beim „Pseudokreis“  $x^3 + y^3 = a^3$  geht die eine Normale beständig durch den Nullpunkt.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Kampen, E. R. van:** A remark on asymptotic curves. Amer. J. Math. **61**, 992—994 (1939).

L'Autore stabilisce una proprietà delle curve asintotiche, uscenti da un punto iperbolico  $P$ , di una superficie  $S$  appartenente allo spazio ordinario, in relazione alla sezione di  $S$  col piano tangente in  $P$ .

*Mario Villa (Bologna).*

**Lane, Ernest P.:** A theorem on surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 117—120 (1940).

Si prova il seguente teorema: Se le asintotiche di una superficie appartengono a complessi lineari, le asintotiche di un sistema sono non soltanto equivalenti proiettivamente fra loro, ma anche alle asintotiche delle rigate costituite dalle tangenti asintotiche dell'altro sistema nei punti di un'asintotica del sistema dato. *E. Bompiani.*

**Levi-Civita, T.:** La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie. Rend. Semin. mat. fis. Milano **12**, 1—33 (1938).

Nach einer historischen Einleitung untersucht der Verf. zuerst die Dreiecke aus Kreisbögen. Die sechs Elemente des zugehörigen Sekantendreiecks werden als Funktionen der sechs Elemente des Kreisbogendreiecks ausgedrückt. Durch Einsetzen der so gefundenen Funktionen in die Formeln der elementaren Trigonometrie findet man Beziehungen zwischen den Elementen des Kreisbogendreiecks (wenn man sich auf „genügend kleine“ Kreisbogendreiecke beschränkt). — Diese Methode kann auf ein Dreieck  $ABC$  angewandt werden, das aus drei beliebigen Bögen  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  auf einer allgemeinen Fläche besteht. Zu diesem Zweck wird zuerst die (bekannte) Beziehung zwischen dem Bogen  $\widehat{AB}$  und dem geodätischen Bogen  $\overline{AB}$  hergestellt. Es zeigt sich dann, daß die oben geschilderte Methode in erster Annäherung auf das Dreieck  $ABC$  (das dem Kreisbogendreieck entspricht) und auf das zugehörige geodätische Dreieck (das dem Sekantendreieck entspricht) ohne weiteres angewandt werden kann. In der zweiten Näherung spielt die Gaußsche Krümmung der Fläche eine Rolle, aber alles spielt sich so ab, als ob die Fläche von konstanter Gaußscher Krümmung wäre. — Schließlich werden auch allgemeine Vorschriften für höhere Annäherungen angegeben.

*Hlavatý (Prag).*

**Tonolo, A.:** Estensione di un teorema trigonometrico di Gauss sui triangoli geodetici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 175—179 (1939).

Nach einem Gaußschen Satze gilt bis zur dritten Ordnung zwischen den Winkeln  $G_h$  eines geodätischen Dreieckes auf einer Fläche  $\sigma$  und den Winkeln  $\Phi_h$  eines geradlinigen euklidischen Dreieckes mit denselben Seitenlängen die folgende Beziehung:  $\Phi_h = G_h - S(2K_h + K_{h+1} + K_{h+2})/12$ . Dabei bedeutet  $S$  den Inhalt des gerad-



linigen Dreieckes und  $K_h, K_{h+1}, K_{h+2}$  die Werte der Gaußschen Krümmung der Fläche  $\sigma$  in den entsprechenden Scheiteln des Dreieckes auf der Fläche. Diese Beziehung wird in der vorliegenden Arbeit auf beliebige Dreiecke auf einer Fläche verallgemeinert, und zwar in der Weise, daß die Berechnung eines solchen Dreieckes mittels gewisser bis zur 4. Ordnung geltenden Formeln auf die Berechnung eines geradlinigen euklidischen Dreieckes zurückgeführt wird.

O. Borůvka (Brünn).

Mihailescu, Tiberiu: Sur les réseaux isothermes-conjugués à courbes planes. C. R. Inst. Sci. Roum. 3, 477—481 (1939).

L'Autore completa mediante alcune proprietà geometriche i risultati di C. A. Nelson (questo Zbl. 4, 129) sulle superficie dello spazio proiettivo ordinario che possiedono un doppio sistema isoterma coniugato di curve piane. Il procedimento seguito è quello del riferimento mobile del Cartan.

P. Buzano (Torino).

Finikoff, S.: Sur le réseau des lignes doubles dans la correspondance ponctuelle de deux surfaces et sur la correspondance A des surfaces. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 475—417 (1939) [Russisch].

Es sei eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Flächen  $S$  und  $S'$  innerhalb des gleichen projektiven Raumes gegeben. In einem Paare entsprechender Punkte gibt es durch einen von ihnen mindestens zwei Tangenten, die die entsprechenden Tangenten durch den anderen Punkt treffen. Die von diesen eingehüllten Kurven nennt man nach L. Ermolaeff die Doppellinien der Korrespondenz. — Verf. untersucht die folgenden Fälle: 1. Die Doppellinien bilden ein konjugiertes Kurvennetz auf  $S$  und  $S'$ . 2. Sie bilden die Asymptotenlinien von  $S$  und  $S'$ . 3.  $S$  und  $S'$  entsprechen sich in der Art, daß sich die Haupttangente entsprechenden Punkte treffen, ohne daß sich die Asymptotenlinien entsprechen. Der Fall 2 führt zu bemerkenswerten Zusammenhängen mit den Flächenpaaren von Demoulin-Godeaux, für die die Lieschen Quadriken in entsprechenden Punkten zusammenfallen, und der Fall 3 ergibt Zusammenhänge mit den Flächen von Jonas und ihren Transformaten. (Vgl. auch dies. Zbl. 10, 177; 11, 83, 244.)

E. Bompiani (Rom).

Rossinski, S.: Sur la déformation des congruences rectilignes avec conservation de certains systèmes spéciaux de surfaces réglées. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 573—629 u. franz. Zusammenfassung 629—636 (1939) [Russisch].

Rossinski, S.: Sur le problème général de la déformation des congruences avec conservation de certains systèmes spéciaux de surfaces réglées. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 307—326 u. franz. Zusammenfassung 327—330 (1939) [Russisch].

Frühere Arbeiten des Verf. werden weitergeführt (dies. Zbl. 10, 418; 13, 128; 20, 166). Mit jeder Tangentenebene einer Fläche  $S$  wird starr je eine Gerade verbunden; die Fläche wird stetig verbogen, wodurch sich auch die Kongruenz  $C$  aller betrachteten Geraden deformiert. Es werden die folgenden Aufgaben gestellt: I. Wie müssen  $S$  und  $C$  beschaffen sein, damit die Hauptschränkungsflächen der Kongruenz bei der Deformation wieder in Hauptschränkungsflächen verwandelt werden? II. Gibt es in der Kongruenz a) konjugierte [oder b) isokline, oder c) orthogonale] Regelflächensysteme, die bei der beschriebenen Deformation beständig konjugiert (oder isoklin, oder orthogonal) bleiben? (Die Bezeichnungen konjugiert, isoklin und orthogonal beziehen sich auf die Schnittgeraden der Tangentenebenen beider Flächen des Systems, welche durch denselben Strahl der Kongruenz gehen und auf die ihm entsprechende Sanniasche Indikatrix.) — In der ersten Arbeit löst man I. und II. für die Fälle, daß die Kongruenzgeraden 1. in den betreffenden Tangentenebenen von  $S$  liegen bzw. 2. senkrecht zu denselben stehen. I. wird unter der Annahme behandelt, daß  $S$  eine Hauptbasis der Verbiegung besitzt, d. h. ein konjugiertes Kurvennetz, welches bei der Verbiegung immer konjugiert bleibt. Die Aufgabe II. wird unter der Annahme sowohl A) einer beliebigen Verbiegung, als auch A\*) einer Verbiegung mit Hauptbasis behandelt. Aus der Fülle der sich ergebenden Resultate in den verschiedenen Fällen führen wir als Beispiele an: I 1.  $S$  kann eine beliebige Fläche sein, die eine Hauptbasis mit einer



Familie geodätischer Kurven besitzt; I 2.  $S$  kann eine Gesimsfläche sein; die Hauptschränkungsflächen der Kongruenz entsprechen den Krümmungslinien von  $S$ . IIb2, Annahme A:  $S$  muß auf eine Spiralfäche verbiegbar sein;  $C$  gehört zu den von Vincensini studierten Spiralkongruenzen (dies. Zbl. 4, 20); die permanenten isoklinen Regelflächensysteme entsprechen den Minimalkurven auf  $S$ . IIc1 und IIc2 erhalten unter A eine negative, unter A\* eine positive Antwort. — In der zweiten Arbeit werden IIa unter A und A\* und IIc unter A bei beliebiger Lage der Kongruenzgeraden bezüglich der betreffenden Tangentenebenen diskutiert; die Antwort auf IIc ist wiederum verneinend.

B. Petkantschin (Sofia).

Efimoff, N.: *Déformation du voisinage d'un point parabolique d'une surface*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 134—136 (1940).

Eine Fläche  $F$  gestatte in der Umgebung des parabolischen Punktes  $O$  die Darstellung (1)  $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \text{hö.h. Glieder}$ ,  $ac - b^2 = 0$ ,  $|a| + |b| + |c| > 0$ ; man nennt die Metrik von  $F$  eine Ausnahmemetrik, wenn unter den durch  $O$  laufenden geodätischen Linien mindestens zwei vorhanden sind, längs derer das Krümmungsmaß  $K$  und  $dK$  verschwinden. Es gilt dann der Satz, daß, wenn  $F$  keine Ausnahmemetrik bestimmt, alle zu  $F$  isometrischen Flächen vom Typus (1) in  $O$  den gleichen Index besitzen, falls dieser nicht unbestimmt wird. Damit sind die Voraussetzungen eines früher bewiesenen Invarianzsatzes (dies. Zbl. 22, 166) eingengt. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Voraussetzung über die Metrik wesentlich ist.

H. Geppert.

Pinl, M.: *W-Projektionen totalisotroper Flächen*. II. Čas. mat. fys. 69, 23—35 (1940).

Sono dati alcuni esempi interessanti di superficie dello spazio a 5 dimensioni applicabili sul piano euclideo, per le quali le curve principali di tre sistemi sono piane. Questi esempi sono ricavati col metodo della „superficie figurativa“ (E. Bompiani, questo Zbl. 11, 418) da esempi di superficie totalmente isotrope in uno spazio euclideo a 7 dimensioni. (Vedi questo Zbl. 18, 171.)

E. Bompiani (Roma).

Bochner, S.: *Harmonic surfaces in Riemann metric*. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 146—154 (1940).

Es handelt sich um einen  $n$ -dimensionalen Riemannschen Raum mit einer definit positiven Metrik  $g_{pq}(x^j)$ . Die Eulerschen Gleichungen für das Variationsproblem  $\iint g_{pq}(x^j) (x_u^p x_u^q + x_v^p x_v^q) du dv = \min$  sind die folgenden [\*]  $\Delta x^i + \Gamma_{pq}^i (x_u^p x_u^q + x_v^p x_v^q) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei  $\partial g_{pq}(x^j) / \partial x^i = g_{p\alpha}(x^j) \Gamma_{iq}^\alpha + g_{\alpha q}(x^j) \Gamma_{pi}^\alpha$ . Unter einer harmonischen Fläche (h. F.) wird eine Lösung von [\*] verstanden. Es werden h. F. bezüglich ihrer Eigenschaften, die teilweise denen der h. F. im euklidischen Falle  $\Delta x^i = 0$  entsprechen, untersucht. Von den Resultaten heben wir das Folgende hervor: Für je zwei in einem Bereiche  $Q$  definierte (und einigermaßen spezialisierte) h. F.  $x^j(u, v)$ ,  $y^j(u, v)$  erreicht die Funktion  $H[x^j(u, v), y^j(u, v)]$ , wobei  $H(x^j, y^j)$  die geodätische Entfernung der Punkte  $x^j$ ,  $y^j$  bedeutet, ihren Maximalwert auf der Grenze des Bereiches  $Q$ .

O. Borůvka (Brünn).

Coburn, N.:  *$V_m$  in  $S_n$  with planar points ( $m \geq 3$ )*. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 774—783 (1939).

A  $V_m$  in  $S_n$  with planar points has  $h_{\lambda\mu}^u = 0$  ( $u = m + 1, \dots, n - 2$ ),  $h_{\lambda\mu}$  being the second fundamental affinors of  $V_m$ . If the rank of  $h_{\lambda\mu}$  is  $> 2$ , then  $V_m$  in  $S_n$  with planar points are either  $V_m$  consisting of  $\infty^1 V_{m-1}$  imbedded in  $\infty^1 S_{m+1}$ , or  $V_m$  consisting of  $\infty^1 V_{m-1}$  imbedded in  $\infty^1 S_m$ , or  $V_m$  lying in  $S_{m+2}$ . In order to prove this theorem the author starts with a proof of extended Segre's theorem about  $V_m$  in  $S_n$  with axial points and then analyzes the fundamental equations (i. e. the equations of Gauss, Codazzi and Ricci).

Hlavatý (Prag).

Levy, Harry: *Conformal invariants in two dimensions*. I. Čas. mat. fys. 69, 50—56 (1940).

The author finds a method by means of which he obtains a sequence of conformal



invariants of two or more curves in the two dimensional case. Example of results: "If two curves have contact of order  $h$ ,  $\sqrt[h]{g^h (k_1^{h-1} \mp k_2^{h-1})}$  is an absolute conformal invariant." ( $g = \det |g_{\lambda\mu}|$ ,  $k_1, k_2$  are the geodesic curvatures of the curves, and  $\mp$  is to be taken according as the curves lie on the same or opposite sides of their common tangent geodesic.) *Hlavatý (Prag).*

**Yano, Kentaro:** Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 247—252 (1939).

En désignant par  $H_{ab}^v$  le tenseur de courbure d'Euler-Schouten d'une  $V_m$  dans  $V_n$  ( $a, b, c, d = 1, \dots, m$ ;  $\omega, \mu, \lambda, \nu = 1, 2, \dots, n$ ) on trouve sans difficulté que

$$M_{ab}^v = H_{ab}^v - \frac{1}{m} g^{cd} H_{cd}^v g_{ab}$$

est invariant par rapport aux transformations conformes du tenseur métrique. D'autre part, on peut construire le tenseur conforme de M. Weyl  $C_{\omega\mu\lambda}^v$  pour la  $V_n$  de même que le tenseur conforme  $C_{abc}^d$  pour la  $V_m$ . Ces deux tenseurs sont liés par une équation analogue à celle de Gauss pour une  $V_m$  dans  $V_n$ , à savoir  $C_{abc}^d = B_{abc\nu}^{\omega\mu\lambda d} C_{\omega\mu\lambda}^v + c_{abc}^d + m_{abc}^d$ . Ici les tenseurs conformes  $c, m$  ne dépendent que du  $C_{\omega\mu\lambda}^v, M_{ab}^v$ . *Hlavatý.*

**Yano, Kentaro:** Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 340—344 (1939).

En partant du résultat obtenu dans le travail précédent, l'auteur le compare aux équations de Weingarten de la géométrie riemannienne ce qui lui permet de trouver (moyennant contraction et élimination) les équations de Codazzi dans la géométrie conforme. *Hlavatý (Prag).*

**Mutô, Yosio:** On some properties of hypersurfaces in a conformally connected manifold. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 615—625 (1939).

With each point  $x^i$  of an  $X_n$  is associated an  $(n+1)$ -dimensional projective space  $P_{n+1}(x)$  and a quadratic hypersurface  $Q_n(x)$ . Then a conformal connection can be defined [K. Yano and Y. Mutô, Proc. phys.-math. Soc. Jap. 21, 270—286 (1939); this Zbl. 21, 427]. The author considers a hypersurface  $X_{n-1}$  in  $X_n$ . This surface determines a  $P_n(x)$  in  $P_{n+1}(x)$  and a quadratic hypersurface  $Q_{n-1}(x)$  in  $P_n(x)$  as a section of  $Q_n(x)$ . Then a conformal connection is defined on  $X_{n-1}$ , which leaves  $Q_{n-1}(x)$  invariant. Some theorems are given about umbilical points and totally umbilical hypersurfaces. The author proves: the necessary and sufficient conditions that any generalized circle of a hypersurface be a generalized circle of the underlying manifold is that the hypersurface is totally umbilic [for generalized circles see K. Yano, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 4, 1—59 (1939); this Zbl. 22, 170]. *J. Haantjes (Amsterdam).*

**Haantjes, J.:** Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 91—94 (1940).

Aus der Definition eines konformeuklidischen Raumes  $C_n$  folgt unmittelbar, daß die Summe  $\sum_1^p m_i x_i$  für jedes System von  $p(>1)$  gegenseitig senkrechten  $m_i$ -Richtungen  $\left(\sum_1^p m_i = n\right)$  gleich ist  $nx$ . Dabei ist  $x_i$  die skalare Krümmung der  $m_i$ -Richtung und  $x$  die skalare Krümmung des ganzen Raumes. Verf. beweist, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, damit der untersuchte Raum (für  $n \geq 4$ ) konformeuklidisch sei. *Hlavatý (Prag).*

**Levine, Jack:** Groups of motions in conformally flat spaces. II. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 766—773 (1939).

D'après un résultat antérieur de l'A. (ce Zbl. 14, 180) un espace de Riemann  $V_n$ , qui admet une représentation conforme sur un espace euclidien, dont la métrique peut s'écrire  $ds^2 = h^2 e_i (dx^i)^2$  ( $e_i = \pm 1$ ) possède comme groupe de mouvement  $G_r$ , un sous-groupe du groupe général conforme  $G_N$  à  $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  paramètres.



On considère ici des sousgroupes simples  $G_r$  de  $G_N$ , obtenus par des combinaisons convenables des  $N$  transformations infinitésimales  $Xf = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$  de  $G_N$  et l'on détermine à l'aide des  $n$  équations  $\xi^i \frac{\partial h}{\partial x^i} + h \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\kappa} = 0$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ), la forme de la fonction  $h$  correspondante. En particulier, en supposant  $h = f(R)$ , où  $R = e_i(x^i)^2$ , on montre que le groupe  $G_r$  de  $V_n$  coïncide avec le groupe  $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$  des rotations, sauf les cas où  $V_n$  est à courbure constante et le cas où  $f(R) = \alpha R^{-1}$ ,  $\alpha$  constante, quand au groupe  $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$  s'associe la transformation infinitésimale des similitudes.

G. Vranceanu (București).

**Bortolotti, Enea:** Contributi alla teoria delle connessioni. II. Connessioni di specie superiore, fondamentali analitici, calcolo del Vitali generalizzato. Mem. Ist. Lombardi Sci. 24, 1—39 (1939).

Jedem Punkte einer  $X_n^m$  (oder  $X_m$ ) werden affine Räume  $E_{N_1} \subset E_{N_2} \subset \dots E_{N_v} \subset \dots$  zugeordnet. In jedem  $E_{N_v}$  wird ein (überzähliges) vektorielles Bezugssystem  $e$  eingeführt ( $\frac{A_v}{R_v} e = 0$ ). An die kovariante Ableitung wird die Bedingung gestellt:  $\frac{A_v}{R_v} \nabla_a \frac{A_v}{R_v} = 0$ . (Die Indizes  $A_v, B_v, \dots$  sind selbstverständlich die zusammengesetzten [verallgemeinerten] Vitalischen Indizes.) Von den Konnexionskoeffizienten  $\Gamma_{B_v a}^{A_v}$  wird die Vitalische Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, nämlich:  $\Gamma_{B_v+1}^{A_v}$  sind Tensoren. Es zeigt sich, daß  $\Gamma_{B_v+1}^{A_v}$  der Projektionstensor für Vektoren des  $E_{(v+1)}$  in  $E_{(v)}$  ist:

$$v = v^{A_v+1} \Gamma_{B_v+1}^{B_v} e + v^{A_v+1} \Omega_{A_v+1}. \text{ Dabei ist } \Omega_{A_v, a} = \nabla_a e - Q \text{ und } Q \equiv \partial_a e - \frac{e}{A_v}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Vitalischen Forderung läßt sich mittels den Transformationsgrößen folgendermaßen schreiben:

$$U_{A_v 0}^{A_v+1} = \delta_{A_v 0}^{A_v+1} U_{A_v'}^{A_v}, \quad U_{A_v' a'}^{A_v+1} = \delta_{A_v' a'}^{A_v+1} U_{A_v'}^{A_v} \theta_{a'}^{A_v} + \delta_{A_v 0}^{A_v+1} \partial_{a'} U_{A_v'}^{A_v},$$

wo  $\theta_{a'}^{A_v}$  die Transformationskoeffizienten der  $X_n^m$  ( $X_m$ ) sind. — Die Bedingung, damit  $E_{v+1}$  der (2)-Oskulationsraum ist, ist  $Q \equiv 0$ . — Für jedes  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq v$  läßt sich aus einem kovarianten Vektor  $w_{A_v}$  des  $E_v$  ein kovarianter Vektor  $w_{A_{\mu-1} 0 \dots 0}$  des  $E_{\mu-1}$  konstruieren (wo  $A_{\mu-1} 0 \dots 0$  mit  $A_{\mu-1}$  der Klasse  $T_{\mu-1}$  angehört und die Anzahl der angeschriebenen Nullen  $v - \mu + 1$  ist) und falls dieser Null ist, auch ein Vektor  $w_{A_{\mu, v}}$  der mit seinen Indizes einer „nicht-ganzen“ (non intera) Klasse gehört. —

Aus der schon zitierten Formel  $\Omega_{A_v, a} = \nabla_a e - Q$  folgt die geometrische Interpretation der Parallelverschiebung der kontravarianten Vektoren des  $E_v$ : das „Differential“  $d v - Q v^{A_v} d u^a$  liegt in dem  $v$ -ten Hauptraum  $\Pi_v$ . Dabei ist  $\Pi_v$  dadurch

bestimmt, daß er mit  $E_v$  nur den untersuchten Punkt gemeinsam hat und mit  $E_v$  den Raum  $E_{v+1}$  bestimmt. Als Hauptraum  $\Pi_{\mu, v}$  wird der durch  $\Pi_\mu, \Pi_{\mu+1}, \dots, \Pi_v$  bestimmte Raum bezeichnet. Die genaue Untersuchung dieser Haupträume gestattet dem Verf. auch die Übertragungskoeffizienten für nicht-ganze Indizesklassen zu konstruieren. Zum Schluß wird die Theorie auf drei verschiedene Möglichkeiten der zusammengestellten Indizes angewendet. Die Arbeit schließt mit zahlreichen Literaturangaben. Die geometrische Anwendung dieses Algorithmus wird (zusammen mit Ref.) demnächst (als III der Folge der Contributi) publiziert. (Vgl. dies. Zbl. 16, 135.)

Hlavatý (Prag).

**Schouten, J. A., and D. van Dantzig:** On ordinary quantities and W-quantities. Classification and geometrical applications. Compositio Math. 7, 447—473 (1940).

The first part consists of results published by J. A. Schouten [Proc. Amsterdam 41, 568—575, 709—716 (1938); this Zbl. 19, 86; 20, 73]. The second part is devoted to a particular discussion of relations between quantities (ordinary as well as



$W$ -quantities) in  $X_m$  and  $X_n$ . The paper ends with a generalisation of Stokes formulae for ordinary quantities and  $W$ -quantities. The particular results of this paper can't be described in a short review without necessary details known only by the students of this paper. *Hlavatý (Prag).*

**Kosambi, D. D.:** The tensor analysis of partial differential equations. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 249—253 (1939).

Verf. betrachtet das Gleichungssystem

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H_{\alpha\beta}^i(u, x, p_\gamma^i) = 0; \quad p_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha};$$

wobei  $H_{\alpha\beta}^i$  sich derart transformiert, daß dieses System bei Transformationen von  $x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) invariant ist. Es handelt sich darum, eine kovariante Ableitung für Größen mit lateinischen und griechischen Indizes aus  $H_{\alpha\beta}^i$  abzuleiten. Es stellt sich heraus, daß die Übertragungsparameter  $\gamma_{\alpha i}^h$  bzw.  $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  sich bis auf einen Term  $\tau_\alpha A_i^h$  bzw.  $2\tau_{(\gamma} A_{\beta)}^\alpha$  bestimmen lassen. Die zu (1) gehörige Übertragung ist also projektiv. *J. Haantjes (Amsterdam).*

**Thomas, T. Y.:** Imbedding theorems in differential geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 841—850 (1939).

Verf. schildert die wichtigsten Resultate über das Einbettungsproblem einer  $r$ -fach stetig differenzierbaren  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Differentialgeometrie in euklidische Räume. Die diesbezüglichen Sätze von Whitney (dies. Zbl. 15, 320), Thomas (dies. Zbl. 15, 273; 16, 327; 22, 84), Bochner (dies. Zbl. 17, 89) und Allendoerfer (dies. Zbl. 16, 418) zusammenfassend wird der Unterschied zwischen dem differentialgeometrischen und dem entsprechenden topologischen Problem betont, wobei jedoch Verf. einen Hinweis auf eine gewisse Analogie zwischen den differentialgeometrischen und topologischen Sätzen, insbesondere was die Hurewicz'sche Behandlung (dies. Zbl. 8, 233) des bekannten Menger-Nöbelingschen Einbettungssatzes betrifft, nicht unterläßt. *G. Alexits (Budapest).*

**Michal, A. D., and A. B. Mewborn:** Abstract flat projective geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 440—443 (1939).

Es handelt sich um eine ohne Beweis dargelegte Reihe von Ergebnissen, die sich als eine Fortführung gewisser anderer Untersuchungen über verwandte Themen erweisen (dies. Zbl. 16, 307; 17, 361; 18, 367). — Ein Banachraum  $B$  von erlaubten Koordinaten  $x$  der Klasse  $C^3$  wird durch die Hinzufügung einer Normierungskoordinate  $e^x$  (von der Klasse  $C^3$ ) zu einem  $B_1$  erweitert. Man setzt voraus, daß  $X = (x, x_0)$  ein im Sinne von Veblen und Whitehead projektives Koordinatensystem für  $B_1$  bedeuten. Ist  $A(X)$  eine projektive skalare Funktion, so daß die Fréchet'schen Differentiale  $A(X; Y)$  gleich auflösbaren Funktionen des projektiven kontravarianten Vektors  $Y$  aus  $B_1$  sind, dann lassen sich die Komponenten zweier geometrischer Objekte, nämlich der projektive Zusammenhang und die projektive Krümmung, allein durch  $A(X)$  erklären. — Die projektive Krümmung erweist sich als Null; daher heißen diese abstrakten Geometrien „flach“. Der projektive Zusammenhang weist eine gewisse Symmetrie auf und ist gegenüber allen auflösbaren linearen Transformationen von  $A(X)$  einschließlich aller Normierungen  $e^x$  invariant. Mehr noch, bei einer Änderung des darstellenden Vektors verhält er sich genau wie der lineare Zusammenhang. — Alle diese Eigenschaften lassen sich folgendermaßen umkehren: Besitzt ein topologischer Hausdorff'scher Raum in einem Banachraum (dessen Erweiterung  $e^x B$  weiter mit  $B_1$  bezeichnet wird) Koordinaten von der Klasse  $C^3$ , und setzt man in  $B_1$  das Vorhandensein eines geometrischen Objektes (des projektiven Zusammenhanges) voraus, das gewisse 6 Aussagen erfüllt (unter ihnen 1. die Symmetrie, 2. die zu dem linearen Zusammenhang ähnlich gebaute Umformung und 3. das Verschwinden der aus diesem Zusammenhang hergestellten Krümmung), so läßt sich ein projektives Koordinaten-



system, das den 5 Axiomen von Veblen und Whitehead genügt, mittels eines Differentialsystems mit lauter Fréchétschen Differentialen für  $B_1$  bestimmen.

*D. Barbilian (București).*

### **Konvexe Gebilde und Verwandtes:**

**Beretta, L., e A. Maxia:** *Insiemi convessi e orbiformi.* Univ. Roma Rend. Mat., V. s. 1, 1—64 (1940).

Die umfangreiche Arbeit gibt einen zusammenfassenden Bericht mit größtenteils ausgeführten Beweisen über den Begriff der konvexen Gebilde und insbesondere die Sätze über Kurven konstanter Breite in der metrischen Geometrie der Ebene und des Raumes, sowie ihre Verallgemeinerung in der affinen und relativen Differentialgeometrie. Im Zuge der Darstellung ergeben sich an vielen Stellen Vereinfachungen und Neugestaltungen der Beweise, von denen einige hervorgehoben seien. Ein neuer Beweis des Satzes von Motzkin, der die abgeschlossenen konvexen Punktmengen dadurch kennzeichnet, daß jeder äußere Punkt bezüglich ihrer nur eine Projektion hat, ein rein affiner Beweis für den Satz von der Existenz der Stützgeraden (bzw. -ebenen). Es folgt die Zurückführung der Gebilde, in denen es zu jedem äußeren Punkt  $P$  genau einen Punkt mit größtem Abstand von  $P$  gibt, auf die hyperkonvexen Bereiche von A. E. Mayer und der Nachweis ihrer äußeren Konvexität; zu ihnen gehören insbesondere die Bereiche fester Breite. Die Behandlung der Orbiformen beginnt mit dem Bücknerschen Satz, der sie dadurch kennzeichnet, daß zwei beliebige Normalen sich stets im Innern schneiden, bespricht ihre Extremumseigenschaften, Sechsscheitelsatz, Krümmungsschwerpunkt und stößt schließlich zu folgender Erweiterung eines Bücknerschen Satzes vor: Der zum Stützwinkel  $\varphi$  gehörige Durchmesser einer Eilinie schneide auf dieser einen Bogen der Länge  $L(\varphi)$  ab und schließe mit ihm den Flächeninhalt  $A(\varphi)$  ein,  $l(\varphi)$  sei der Abstand der zu den Durchmesserenden gehörenden Stützgeraden, dann ist die Beziehung  $2A(\varphi) - l(\varphi)L(\varphi) = \text{konst.}$  für Orbiforme kennzeichnend. Neuartig ist die Behandlung der räumlichen Kurven fester Breite, d. h. derjenigen geschlossenen Kurven  $C$ , die von der Normalebene jedes ihrer Punkte  $P$  in genau einem Gegenpunkt  $P_1$  unter festem Abstand  $PP_1$  getroffen werden, mittels der sphärischen Indikatrix der Sehnen  $PP_1$ . Es folgt die Besprechung der affinen Orbiformen nach Süß und Hirakawa; neu ist der Satz, daß die einzigen Eiliniën, deren Affinnormalen in Gegenpunkten parallel sind, die Mittelpunktseliniën sind.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Bol, G.:** *Ein Satz über Eiliniën.* Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 319—320 (1940).

Der bekannte Satz, daß eine Eilinie, die mit einem Kreis  $2k$  Punkte gemein hat, mindestens  $2k$  Scheitel besitzt, läßt sich im einfachsten Falle auch umkehren: Zu einer Eilinie mit mindestens 6 Scheiteln läßt sich stets ein Kreis angeben, der sie in mindestens 6 Punkten schneidet, oder anders: Die Eiliniën der zyklischen Ordnung 4 sind genau die mit 4 Scheiteln. Beweis des letzten Satzes durch Betrachtung der Berührungspunktpaare der die Eilinie zweifach von innen berührenden Kreise, durch die eine gegenläufige topologische Abbildung der Eilinie in sich mit genau zwei Doppelpunkten erklärt wird; in letzteren und nur dort liegen die Höchstwerte der Krümmung. Eine einfache Folgerung dieses Satzes ist die, daß die Jordankurven der kinematischen Eigenordnung 4 genau die konvexen Mittelpunktskurven mit 4 Scheiteln sind. Definiert man die Höchstzahl der Schnittpunkte einer Jordankurve mit ihrem Spiegelbild an einer beliebigen Geraden als ihre Spiegelordnung, so folgt weiter, daß die Jordankurven der Spiegelordnung 4 genau die konvexen Mittelpunktskurven mit 4 Scheiteln und 2 Symmetrieachsen sind.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Ruban, A. N.:** *Sur le problème du cylindre flottant.* C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 350—352 (1939).

Ein homogener Zylinder möge auf dem Wasser so schwimmen, daß seine Erzeugenden stets der Wasserfläche parallel sind; es wird gefragt, welche Form sein senkrechter



Querschnitt haben muß, damit der Zylinder in jeder Lage im Gleichgewicht sei. Dies kommt auf die Bestimmung aller ebenen geschlossenen Kurven  $C$  hinaus, bei denen zu jedem Randbogen der festen Länge  $S$  eine Sehne der festen Länge  $L$  gehört. Die Frage ist durch eine früher besprochene Arbeit des Ref. erledigt (vgl. dies. Zbl. 22, 266). Verf. beschränkt sich auf konvexe Kurven; seine Ergebnisse sind in denen des Ref. enthalten; u. a. stellt er die falsche Behauptung auf, daß, wenn  $S$  der halbe Umfang von  $C$  ist,  $C$  ein Kreis sein müsse.

Harald Geppert (Berlin).

Salgaller, V., et P. Kosteljanetz: Sur le problème du cylindre flottant. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 353—355 (1939).

Verf. beschäftigen sich mit der im vorangehenden behandelten Aufgabe, konstruieren einige nichtkonvexe Kurven  $C$  mit der genannten Eigenschaft, stellen fest, daß eine konvexe Kurve  $C$  der genannten Klasse keine Ecken besitzen kann, und gewinnen einen Satz von Salkowski (dies. Zbl. 10, 77) wieder. Ihre Ergebnisse sind in denen der oben genannten Arbeit des Ref. enthalten.

Harald Geppert.

Alexandroff, A. D.: Über konvexe Flächen mit ebenen Schattengrenzen. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 309—316 u. deutsch. Zusammenfassung 316 (1939) [Russisch].

Als konvexes Flächenstück  $S$  wird eine nicht in einer Ebene liegende, beschränkte, zusammenhängende und offene Menge auf der Oberfläche eines konvexen Körpers definiert; Schattengrenze auf  $S$  ist jede Menge von Punkten auf  $S$ , die in Stützebenen liegen, welche parallel zu einer Richtung sind. Ohne weitere Regularitätsannahmen zeigt Verf.: Ein konvexes Flächenstück mit lauter ebenen Schattengrenzen ist ein Stück entweder einer Fläche 2. Ordnung oder eines konvexen Kegels. — Das Hauptziel des Verf. ist zu zeigen, daß bei der gemachten Annahme gewisse Resultate von Gitomirski [Rec. math. Moscou, N. s. 3, 347—351 (1938); dies. Zbl. 19, 193; dem Ref. stand die Arbeit nicht zur Verfügung] gelten, so daß die Methode des Verf. stärker ist als die Methode von Gitomirski, welche Differenzierbarkeitsannahmen benutzt. Zu dieser Feststellung verwendet Verf. einige von Busemann und Feller (dies. Zbl. 12, 274) gefundene Ergebnisse über konvexe Flächen.

B. Petkantschin (Sofia).

Alexandroff, A.: Über die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers. (Bemerkung zur Arbeit „Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern“.) Rec. math. Moscou, N. s. 6, 167—173 u. deutsch. Zusammenfassung 173—174 (1939) [Russisch].

Die Betrachtungen schließen sich an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 17, 426) an. Die Grundeigenschaften der dort eingeführten Oberflächenfunktion  $F(H, \omega)$  eines konvexen Körpers werden auf kürzerem Wege abgeleitet, wobei zugleich eine Lücke in der genannten Abhandlung ausgefüllt wird. Als Mittel wird die hier aufgestellte Formel verwendet:

$$\int_{\Omega} f(\bar{n}) F(H, d\omega) = \int_{\Sigma} f(\bar{n}(\bar{r})) F(d\sigma) = \int_{\Omega} f(\bar{n}(\bar{r})) \frac{R(\bar{r})^{n-1}}{\cos \varphi(\bar{r})} F(d\tau).$$

Hierin bezeichnet  $H$  einen  $O$  im Innern enthaltenden konvexen Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes,  $\Sigma$  dessen Rand,  $\Omega$  die Oberfläche der Einheitskugel um  $O$ .  $\bar{r}$  ist der Ortsvektor eines Punktes auf  $\Omega$ ,  $R\bar{r}$  ( $R = R(\bar{r}) > 0$ ) der Durchstoßpunkt auf  $\Sigma$  mit der Halbgeraden  $\bar{r}$ ,  $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$  das Gaußsche sphärische Bild auf  $\Omega$  von  $R\bar{r}$ ,  $\varphi(\bar{r})$  der Winkel zwischen  $\bar{r}$  und  $\bar{n}$ . Einer Menge  $\omega$  von Punkten  $n$  auf  $\Omega$  entsprechen: eine Menge  $\sigma$  von Punkten  $R\bar{r}$  auf  $\Sigma$  und eine Menge  $\tau$  von Punkten  $\bar{r}$  auf  $\Omega$ ;  $F(\sigma)$  und  $F(\tau)$  sind bzw. die Oberflächen von  $\sigma$  und  $\tau$ .  $f(\bar{n})$  ist eine stetige Funktion auf  $\Omega$ .

B. Petkantschin (Sofia).

Dinghas, Alexander: Geometrische Anwendungen der Kugelfunktionen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 213—235 (1940).

Für ebene Eiliniien  $C$  gilt nach Hurwitz folgende Ungleichung für das isoperimetrische Defizit:  $0 \leq \frac{L^2}{4\pi} - F \leq \frac{1}{4} Q$ , worin  $Q = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi - F \geq 0$  den Inhalt



der Evolute von  $C$ ,  $\varrho$  den Krümmungsradius von  $C$  bezeichnen. Eine ähnliche Verschärfung gilt auch für die Quermaßintegrale der  $n$ -dimensionalen konvexen Körper  $K$ :

$$(1) \quad 0 \leq \frac{W_{n-1}^2}{W_n} - W_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n} Q_n,$$

worin  $Q_n = \frac{1}{n} \int P^2 d\omega - W_{n-2} \geq 0$ ,  $P = \frac{1}{n-1} (R_1 + \dots + R_{n-1})$  den Mittelwert der Hauptkrümmungsradien  $R_1 \dots R_{n-1}$  von  $K$ ,  $d\omega$  das Flächenelement der  $n$ -dimensionalen Einheitssphäre  $S_n$  bezeichnen. — Den Beweis erbringt Verf. durch Entwicklung der Stützfunktion nach  $n$ -dimensionalen Kugelfunktionen  $X_\nu$  unter Heranziehung einer entsprechenden Erweiterung und Verschärfung des Wirtingerschen Lemmas: Bedeuten  $\nabla_1, \Delta_1$  den ersten und zweiten Differentialoperator in Polarkoordinaten auf  $S_n$ , so gelten für jede auf  $S_n$  eindeutige und zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u$ , die  $\int u d\omega = 0$  erfüllt, die Ungleichungen

$$\frac{1}{2n} \int_{S_n} \{ (n-1) \nabla_1 u - \Delta_1^2 u \} d\omega \leq \int_{S_n} [(n-1) u^2 - \nabla_1 u] d\omega \leq 0,$$

wobei rechts die Gleichheit nur für  $u = X_1$ , links für  $u = X_1 + X_2$  eintritt. — Weiterhin bestimmt Verf. diejenigen Extremalkörper, bei denen in (1) rechts die Gleichheit

steht; ist  $K_i$  der Drehkörper mit der Gleichung  $\left( \sum_{k \neq i}^1 \dots^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{3}} + x_i^{\frac{2}{3}} = c_i \geq 0$ ,  $K_i + h_i S_n$

konvex ( $i = 1 \dots n-1$ ), so sind die Extremalkörper lineare Kombinationen dieser Körper für alle zulässigen positiven Konstanten  $h_i$ ; im Falle der Ebene erhält man Parallelkurven zu den Hurwitzschen Sternkurven  $x_1 = 2c \cos^3 \varphi$ ,  $x_2 = 2c \sin^3 \varphi$ . — Aus (1) läßt sich bei stetig gekrümmten Körpern  $K$  die Existenz mindestens zweier Punkte 1, 2 auf  $K$  folgern, so daß  $W_n P_1 < W_{n-1} < W_n P_2$  wird, wodurch die entsprechende ebene Ungleichung  $2\pi \varrho_1 < L < 2\pi \varrho_2$  verallgemeinert wird. (1) läßt sich auf die gemischten Inhalte zweier konvexer Körper erweitern. *Harald Geppert.*

**Stoker, J. J.:** Unbounded convex point sets. Amer. J. Math. **62**, 165—179 (1940).

Es werden hier einfache geometrische Sätze über unbeschränkte konvexe Punkt-mengen im Euklidischen  $E_3$  auf einfache Art bewiesen, Ergebnisse, die z. T. auch bei Steinitz in J. reine angew. Math. **143**, 128—175 (1913); **144**, 1—40 (1914); **146**, 1—52 (1915) auf andere Art gewonnen sind. Einfache Beispiele sind: 1. die Punkte zwischen zwei parallelen Ebenen, 2. die Punkte eines Zylinders, 3. die Punkte zur einen Seite einer Ebene. Es wird insbesondere gezeigt, daß diese 3 Beispiele alle Möglichkeiten über die topologische Struktur des Randes erschöpfen. Ein anderes Ergebnis: Genau dann gibt es einen Randpunkt mit einer Stützebene, dessen innere Halbnormale in der Menge liegt, wenn der Rand homomorph zur Ebene ist. *Blaschke (Hamburg).*

**Schmidt, Erhard:** Über die isoperimetrische Aufgabe im  $n$ -dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene und für Rotationskörper im  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raum. Math. Z. **46**, 204—230 (1940).

Der Verf. hat in Math. Z. **44**, 689—788 (1939) (dies. Zbl. **20**, 373—374) die isoperimetrische Hauptungleichung für die Kugel im Euklidischen  $E_n$  bewiesen. Jetzt stellt er sich die entsprechende Aufgabe für den hyperbolischen Raum  $H_n$ . In dem vorliegenden ersten Teil der Arbeit werden die Ebene  $H_2$  und Drehkörper im  $H_n$  behandelt. Dabei wird von einem „Drehkörper“ angenommen, daß er bei der Gruppe der Drehungen um eine Gerade in sich übergeht. Bemerkenswert ist, daß bei dieser Untersuchung wieder keine einschränkenden Annahmen über den Zusammenhang der zulässigen Körper gemacht werden, noch weniger wird Konvexität vorausgesetzt. Nur der Rand wird zweimal stetig differenzierbar angenommen. Zuerst (§ 1) der Fall der hyperbolischen Ebene  $H_2$ , die in der Halbebene  $x > 0$  auf die Art von Poincaré mit dem hyperbolischen Bogenelement  $ds^2 = \frac{dx^2}{x^2}$  verwirklicht wird! Es sei  $2\alpha$  der

kleinste Winkel, unter dem die Randlinie  $C$  des vorgegebenen Gebiets in  $x > 0$  von den Punkten der  $y$ -Achse gesehen wird.  $2\alpha' [2\alpha'']$  der entsprechende Winkel für eine Kreislinie gleichen (hyperbolischen) Umfangs [Flächeninhalts] wie  $C$ . Dann läßt sich durch einfachste Abschätzungen (ganz ähnlich wie für die  $E_2$ ) zeigen

$$\cos \alpha'' \geq \frac{\cos \alpha'}{\cos(\alpha - \alpha')}, \quad (1)$$

was eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit  $\alpha'' \leq \alpha'$  bedeutet. Diese Ungleichheit (1) wird weiter verschärft und in § 2 gezeigt, daß die Gleichheit in der durch die Verschärfung aus (1) entstandenen Formel nur für eine ganz bestimmte Randlinie  $C$  gilt. Das hier im Falle der  $H_2$  angewandte Verfahren läßt sich nun überraschenderweise (§ 3) auf die Drehkörper im  $H_n$  übertragen. Diese Methode von E. Schmidt läßt sich als eine Durchführung und Weiterbildung des klassischen, von H. A. Schwarz (1884, Werke II, S. 327—340) angewandten Verfahrens ansehen. Eine Übertragung auf den Fall der sphärischen Geometrie ist in Aussicht gestellt.

*Blaschke (Hamburg).*

**Takasu, Tsurusaburo:** Über die Carlemansche Isoperimetrie auf den Minimalflächen. Jap. J. Math. 15, 269—275 (1939).

Der Autor gibt einen Beweis des Carlemanschen Satzes über Isoperimetrie auf den Minimalflächen unter kombinierter Verwendung der Carlemanschen und Beckenbachschen Methode. Dabei benutzt Verf. eine bekannte Ungleichheit über analytische Funktionen, die mit dem Steinerschen Satz über Isoperimetrie äquivalent ist. *Kubota.*

**Vázsonyi, André:** Caractérisation topologique des continus plans d'ordre quatre. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1775—1776 (1939).

Die gestaltliche Beschreibung reeller Gebilde einer vorgegebenen Ordnung wird hier auf eine neue Weise in Angriff genommen. Betrachtet werden als Gebilde die Kontinua  $K$  der Ebene; als Ordnung wird zugrunde gelegt die lineare (also die maximale Mächtigkeit  $n$  des Durchschnitts von  $K$  mit den Geraden). Verf. teilt hierüber folgenden Satz (ohne Beweis) mit: Für  $n = 2, 3, 4$  ist ein Kontinuum  $K$  (der Ordnung  $n$ ) homöomorph zu einer (echten oder unechten) Teilmenge eines (passenden) ebenen Kontinuums  $k$  dieser Ordnung  $n$ , welches Summe aus  $n$  Bogen der Ordnung 2 (Konvexbogen) ist. Für  $n = 4$  gibt es genau drei verschiedene Typen solcher  $k$ . Bemerkt wird noch, daß  $K$  bei beliebigem  $n$  homöomorph ist zu einer Teilmenge eines Kontinuums, welches Summe aus  $n$  Konvexbogen, also höchstens von der Ordnung  $2n$ , ist. *Haupt.*

### Topologie:

● **Morse, Marston:** Functional topology and abstract variational theory. Mém. Sci. math. Fasc. 92, 79 pag. (1939).

Dieses Heft enthält einen knappen, aber inhaltsreichen Abriß der im wesentlichen vom Verf. stammenden functional topology, die inzwischen sehr weit bekannt geworden und in ihrer Bedeutung anerkannt ist. Von der etwas später erschienenen Darstellung von H. Seifert und W. Threlfall (dies. Zbl. 21, 141) unterscheidet sich dieser Aufbau besonders durch die weiteren Voraussetzungen. Die Theorie gründet sich hier auf die Hypothese der  $F$ -accessibility, nach welcher für die zugrunde gelegte Funktion  $F$  in dem betrachteten metrischen Raum  $M$  jeder nicht berandende Zyklus, der modulo der Punktmenge  $p$  mit  $F(p) \leq c + \varepsilon$  für jedes positive  $\varepsilon$  nullhomolog ist, homolog einem Zyklus in der Menge  $F(p) \leq c$  ist. Dabei werden Vietoriszyklen zugrunde gelegt. Eine weitere Voraussetzung ist die upper-reducibility, welche zu dem Nachweis dient, daß jede obere oder untere Homologiegrenze in einem gewissen homotopic critical point angenommen wird. Die in den beiden ersten Kapiteln entwickelte Theorie wird im dritten Kapitel auf das Extremalproblem der Verbindungskurven zwischen zwei festen Punkten  $a$  und  $b$  eines metrischen Raumes  $\Sigma$  und den von den Verbindungskurven gebildeten Raum  $\Omega(a, b)$  an Stelle von  $M$  angewandt. Historische Bemerkungen und eine Bibliographie vervollständigen das Heft. *Wolfgang Franz (Gießen).*



**Elsholz, L.:** Die Änderung der Bettischen Zahlen der Niveauflächen einer stetigen Funktion, die auf einer Mannigfaltigkeit definiert ist. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 559—564 u. deutsch. Zusammenfassung 564 (1939) [Russisch].

Auf einer Mannigfaltigkeit  $M^n$  sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$  gegeben;  $c$  sei ein kritischer Wert, der einem nicht ausgearteten kritischen Punkt mit der typischen Zahl  $k$  entspricht; in der Strecke  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  liege nur der kritische Wert  $c$ . Bezeichnet  $p^r$  die  $r$ -te Bettische Zahl mod 2, so gilt für die Niveaufläche  $N = (f = c - \varepsilon)$  bzw.  $N' = (f = c + \varepsilon)$ : 1)  $p^k(N) = p^k(N') - 1$  und  $p^{n-k-1}(N) = p^{n-k-1}(N') - 1$  oder 2)  $p^{k-1}(N) = p^k(N') + 1$  und  $p^{n-k}(N) = p^{n-k}(N') + 1$ . Die Bettischen Zahlen anderer Dimensionen ändern sich nicht. Im Falle  $2k = n$  kann noch eine Möglichkeit auftreten: 3) Alle Bettischen Zahlen der Niveauflächen stimmen überein. (Gekürzte deutsche Zusammenfassung.) *Nöbeling* (Erlangen).

**Chogoshvili, G. S.:** On level surfaces and domains of smaller values of a function defined on a bounded manifold. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 635—639 (1939).

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Rand  $B$  ist eine Funktion  $f$  definiert, die auf  $B$  die Funktion  $f_b$  induziert. Der Verf. untersucht die Änderung der Bettischen Zahlen der Niveauflächen  $f = c$  bzw. der Gebiete  $f \leq c$  beim Durchgang durch einen kritischen Punkt von  $f_b$ . *E. Hölder* (Braunschweig).

**Tucker, A. W.:** The algebraic structure of complexes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 643—647 (1939).

Es seien  $e$  und  $f$  zwei quadratische Matrizen mit Elementen aus einem beliebigen Ring mit folgenden Eigenschaften:  $ee = 1$ ,  $ff = 0$ ,  $ef + fe = 0$ . Verf. bezeichnet die Elemente von  $e$  mit  $yEx$ , die von  $f$  mit  $yFx$ , wobei die Symbole  $y$  und  $x$  eine Menge von Unbestimmten durchlaufen, welche „Zellen“ genannt werden (ohne daß ihnen eine Dimension und Inzidenzen aufgeprägt zu sein brauchen); auf diese Weise entsteht ein algebraisches System  $X$ , welches man formal als „Komplex“ bezeichnen kann, weil man darin eine kombinatorische Topologie treiben kann. Beispielsweise ordnet Verf. jeder „Zelle“  $x$  bzw.  $y$  von  $X$  als Rand bzw. Corand zu:  $Fx = y(yFx)$  bzw.  $yF = (yFx)x$ , wobei über  $y$  bzw.  $x$  summiert wird. Weiter entwickelt Verf. für die „Komplexe“  $X$  die Grundlagen der Theorie der Homologie, der Abbildungen algebraischer Komplexe (chain-mappings), der Produkte von Komplexen und der zugehörigen Co-Theorien. *Nöbeling* (Erlangen).

**Markoff, A.:** On the definition of a complex. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 545—550 (1939).

Im Anschluß an das Buch von P. Alexandroff und H. Hopf über Topologie (dies. Zbl. 13, 79) wird unter leichter Modifizierung der Grundbegriffe auf eine neue, einfachere Definitionsmöglichkeit für den Begriff des euklidischen Komplexes hingewiesen: Ein Komplex  $K$  im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E^n$  ist dann und nur dann ein euklidischer Komplex, wenn die konvexen Hüllen irgend zweier punktfremder Elemente von  $K$  selbst keine gemeinsamen Punkte haben. Anschließend wird ein Satz über  $\varepsilon$ -Transformationen euklidischer Komplexe bewiesen.

*Wolfgang Franz* (Gießen).

**Kurosch, Alexander:** Zur Theorie der teilweise geordneten Systeme von endlichen Mengen. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 343—345 u. deutsch. Zusammenfassung 345—346 (1939) [Russisch].

Endliche, z. B. offene Überdeckungen topologischer Räume können in bekannter Weise als Komplexe angesehen werden;  $a < b$  möge aussagen, daß  $b$  „feiner“ als  $a$  ist;  $a$  ist ein simpliziales Bild, sog. Projektion, von  $b$ . Entsprechendes erhält man für die zugehörigen Bettischen Gruppen usw. Sieht man von dem Grundraume ab, so entsteht eine Theorie teilweise geordneter Klassen endlicher Komplexe bzw. Gruppen. Verf. zeigt, daß man allgemeiner teilweise geordnete Klassen endlicher Mengen  $A_\alpha$  betrachten kann: Gibt es für je zwei solche Mengen einen gemeinsamen Nachfolger und ist  $A_\alpha < A_\beta$  immer eine „Projektion“ von  $A_\beta$ :  $A_\alpha = \pi_{\alpha\beta} A_\beta$  mit der Bedingung  $\pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\gamma\beta} \pi_{\beta\alpha}$  für die Projektionen, so ist jede Projektionsmenge in einer vollständigen enthalten. Dabei heißt eine Menge  $P$  von Elementen aus einigen  $A_\alpha$  eine Pro-

jektionsmenge, wenn je zwei Elemente aus  $P$  Projektionen eines gemeinsamen Elementes von  $P$  sind. Sie heißt vollständig, falls sie aus jeder Menge  $A_\alpha$  ein Element enthält.

*Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Flexner, William W.:** The generality of finite abstract complexes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 637—639 (1939).

Es sei  $A$  ein abstrakter endlicher Komplex (vgl. Lefschetz, dies. Zbl. 16, 419). Ein offener Teilkomplex  $C$  eines abstrakten Komplexes  $D$  ist eine Teilmenge von  $D$  derart, daß aus  $x \in C$  und  $y > x$  folgt  $y \in C$ . Verf. zeigt für jedes  $A$  die Existenz eines offenen Teilkomplexes  $B$  eines simplizialen Komplexes derart, daß für jedes  $q$  die Homologiegruppen  $H^q(A)$  und  $H^{q+\alpha}(B)$  isomorph sind; hierbei ist  $\alpha = 0$ , wenn  $A$  keine Elemente negativer Dimension und keine nulldimensionale Torsion hat; sonst ist  $\alpha > 0$ ; die Koeffizientengruppe ist beliebig. Hiernach sind bezüglich der Homologietheorie im endlichen Fall simplizial realisierbare Komplexe genau so allgemein wie die abstrakten Komplexe.

*Nöbeling* (Erlangen).

**Wylie, S.:** Duality and intersection in general complexes. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 174—198 (1940).

Es sei  $K = K_n$  ein homogen- $n$ -dimensionaler, endlicher Komplex.  $L$  sei ein abgeschlossener Teilkomplex von  $K$  mit normaler Umgebung in  $K$ . Jedes  $n$ -Simplex  $\sigma_n$  von  $K$  sei orientiert; dann bilden die  $\delta_n$  einen  $n$ -dimensionalen algebraischen Komplex; die im Rand desselben enthaltenen  $(n-1)$ -Simplexe  $\sigma_{n-1}$  und deren Seiten bilden einen abgeschlossenen Komplex, der mit  $J$  bezeichnet sei. Das Komplement  $K/\sigma_r$  eines  $\sigma_r$  von  $K$  ist das System aller Simplexe  $\sigma_s$ , der abgeschlossenen Hülle von  $K$ , für welche  $\sigma_r \sigma_s$  ein Simplex von  $K$  ist.  $K \bmod L$  heißt  $r$ -regulär, wenn für jedes nicht in  $J$  enthaltene Simplex  $\sigma_q$  das Komplement  $K/\sigma_q$  dieselbe Bettische Zahl  $R_{n-r-1}$  und dieselben Torsionszahlen  $\theta_{n-r-2}$  hat wie die  $(n-q-1)$ -Sphäre, während für jedes  $\sigma_q$  von  $J$  die genannten Zahlen dieselben sind wie für einen Punkt. Verf. beweist auf zwei Arten den Satz: Ist  $K \bmod L$   $p$ - und  $(p-1)$ -regulär, so besteht zwischen der  $(n-p)$ -ten Gruppe von  $K \bmod L$  und der  $p$ -ten Gruppe von  $K - L \bmod J$  die klassische Dualitätsrelation:

$$R_{n-p}(K \bmod L) = R_p(K - L \bmod J), \quad \theta_{n-p-1}(K \bmod L) = \theta_p(K - L \bmod J)$$

(Koeffizienten sind ganze Zahlen). Dieser Satz enthält sowohl den allgemeinen Dualitätssatz in der Fassung von Lefschetz (Topology, Amer. Math. Soc. Koll. Publ., XIII, 1930), als auch den Dualitätssatz von Čech (Ann. of Math. (2) 37, 681—697; dies. Zbl. 15, 13), also alle bekannten allgemeinen Dualitätssätze für Komplexe. — Im 2. Teil der Arbeit wird gezeigt, wie weit die Definitionen und Sätze der Schnitttheorie von den Mannigfaltigkeiten auf homogen- $n$ -dimensionale Komplexe ausgedehnt werden können; es ergeben sich dabei verschiedene Typen von Schnitten. — Die Überlegungen der Arbeit sind bewußt geometrisch (im Sinne der kombinatorischen Topologie), im Gegensatz zu neueren Arbeiten über Dualität und Multiplikation von Zyklen, die meist algebraisch verfahren. — Es sei noch erwähnt, daß Verf. zum Studium der Dualität „Zyklen vom dualen Typ“ einführt, d. h. Zyklen der ersten Ableitung  $K'$  von  $K$ , die homolog sind zu Zyklen von dualen Zellen.

*Nöbeling* (Erlangen).

**Flexner, William W.:** Character group of a relative homology group. Ann. of Math., II. s. 41, 207—214 (1940).

Es sei  $L$  ein Teilkomplex eines endlichen Komplexes  $K$ . Weiter sei  ${}^p\mathfrak{S}^G(L, K)$  die Restklassengruppe der Gruppe aller in  $K$  berandenden  $p$ -dimensionalen Zyklen von  $L$  bezüglich der Untergruppe der in  $L$  berandenden Zyklen; der Koeffizientenbereich sei eine diskrete oder bikompakte abelsche Gruppe  $G$ . Schließlich sei  ${}^p\mathfrak{S}_H(L, K)$  die Restklassengruppe der Gruppe aller  $p$ -dimensionalen Cozyklen von  $L$  bezüglich der Untergruppe aller derjenigen, welche die in  $L$  liegenden Teile von Cozyklen von  $K$  sind; hierbei ist der Koeffizientenbereich die bikompakte bzw. diskrete Charaktergruppe  $H$  von  $G$ . Verf. zeigt u. a.:  ${}^p\mathfrak{S}_H(L, K)$  ist die Charaktergruppe von  ${}^p\mathfrak{S}^G(L, K)$



(und umgekehrt);  ${}^p\mathfrak{S}_H(L, K)$  ist isomorph zur Restklassengruppe der  $p$ -dimensionalen Cohomologiegruppe  ${}^p\mathfrak{S}_H(L)$  (mit dem Koeffizientenbereich  $H$ ) von  $L$  bezüglich der Untergruppe derjenigen Klassen (Cosets) von  ${}^p\mathfrak{S}_H(L)$ , welche die auf  $L$  liegenden Teile von Cozyklen von  $K$  enthalten.

Nöbeling (Erlangen).

**Eilenberg, Samuel:** Cohomology and continuous mappings. Ann. of Math., II. s. 41, 231—251 (1940).

Let  $K$  be a geometrical locally finite complex with oriented convex cells  $\sigma_i^n$  of dimension  $n$ ; let  $\partial_{ij} = 1, -1, 0$  according as  $\sigma_i^n$  is positively, negatively, or not at all on the boundary of  $\sigma_j^{n+1}$ . Then  $\sum_j \partial_{ij} \sigma_j^{n+1}$  is called the coboundary of  $\sigma_i^n$ . A close

analogy with usual cycles and homologies allows us to define the cohomology groups  ${}^nH_G(K)$  of  $K$  of dimension  $n$ , etc. ( $G$  is the abelian group of the coefficients in the chains). Denoting by  $K^n$  the closed subcomplex of  $K$  consisting of all its cells of dimension  $\leq n$ , let  $f$  be a continuous mapping of  $K' + K^n$  into  $Y$ , where  $K'$  is any closed subcomplex of  $K$ ,  $Y$  simple in dimension  $n$ , e. g. a sphere of an arbitrary dimension. Let  $c^{n+1}(f)$  be the chain in  $K$  with coefficients in the Hurewicz  $n$ th homotopy group  $\pi_n$  of  $Y$  such that the coefficient of  $\sigma_j^{n+1}$  is determined by the map under  $f$  of the boundary of  $\sigma_j^{n+1}$ . Author shows (p. 239) that  $c^{n+1}(f)$  is a cocycle in  $K - K'$ , cohomologous to zero in  $K - K'$  if and only if there is a continuous mapping of  $K' + K^{n+1}$  into  $Y$  which coincides with  $f$  on  $K' + K^n$ . As a generalization of a theorem of Hopf and Whitney is then (p. 243) shown that, supposing  ${}^iH_{\pi_i}(K) = {}^{i+1}H_{\pi_i}(K) = 0$  for  $i > n$ , the elements of  ${}^nH_{\pi_n}(K)$  are in a one-to-one correspondence with the homotopy classes of the continuous mappings of  $K$  into  $Y$ . The paper contains finally several applications, e. g. (part V) a homology interpretation of the foregoing results.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

**Whitehead, J. H. C.:** Simplicial spaces, nuclei and  $m$ -groups. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 243—327 (1939).

In dieser Arbeit werden zwei neue, mit Hilfe dimensionsverändernder Prozesse definierte kombinatorisch-topologische Begriffe eingeführt und erörtert. 1. Von zwei Komplexen wird gesagt, sie haben denselben Nucleus, wenn sie durch Anwendung einer Operation „Kontraktion“ oder der inversen Operation oder einer Folge von solchen ineinander übergehen. Eine Kontraktion kann auf ein  $k$ -Simplex  $S^k$  und ein auf dem Rande von  $S^k$  gelegenes  $(k-1)$ -Simplex  $S^{k-1}$  angewandt werden, wenn  $S^k$  das einzige  $k$ -Simplex ist, das  $S^{k-1}$  auf dem Rande trägt; es werden dann  $S^k$  und  $S^{k-1}$  aus dem Komplex entfernt. Der Nucleus ist eine kombinatorische Invariante des Komplexes, ob er auch eine stetigkeitstopologische Invariante ist, steht dahin; das letztere wird nur für solche Komplexe gezeigt, deren Fundamentalgruppe einer gewissen sehr einschränkenden Bedingung genügt. (Anm. d. Ref.: Diese Bedingung ist schon unter allen zyklischen Gruppen nur für die mit 1, 2, 3, 4 und 6 Elementen erfüllt, wie die Einheitentheorie der Kreiskörper zeigt.) 2. Von zwei Komplexen wird gesagt, sie haben dieselbe  $m$ -Gruppe, wenn sie durch eine Operation „Ausbohrung“ mit einer Ordnung  $> m$  oder durch die inverse Operation oder durch eine Folge von solchen Operationen oder solchen der unter 1. genannten Art ineinander übergehen. Eine Ausbohrung der Ordnung  $k$  entfernt aus dem Komplex ein  $k$ -Simplex. Die  $m$ -Gruppe stellt in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Begriffes der Fundamentalgruppe dar: Gleichheit der Fundamentalgruppen zweier Komplexe ist gleichwertig mit der Gleichheit der 2-Gruppen. Für zwei gegebene endliche Komplexe dürfte jedoch die Übereinstimmung der  $m$ -Gruppen für  $m > 2$  ebenso wie die der Nuclei nicht in endlich vielen Schritten entscheidbar sein. Das Hauptresultat ist folgendes: Gehören zwei Komplexe zur gleichen Homotopieklasse (im Sinne von Hurewicz), so haben sie die gleichen  $m$ -Gruppen für alle  $m$ , die  $m$ -Gruppen sind also stetigkeitstopologische Invarianten; umgekehrt gehören endliche Komplexe von höchstens  $n$  Dimensionen mit gleicher  $(n-1)$ -Gruppe zur selben

Homotopieklasse. In den Beweisen spielen Neueinfügungen von Zellen in den Komplex, in ähnlicher Art wie sie von Aronszajn (dies. Zbl. 16, 279) eingeführt sind, eine wichtige Rolle. Enge Beziehungen bestehen zu der Homotopietheorie von Hurewicz (dies. Zbl. 10, 378; 11, 371; 13, 229; 13, 283); die hier untersuchten durch die Fundamentalgruppe in den höherdimensionalen Homotopiegruppen induzierten Automorphismen dürften in der (bis jetzt leider noch ausstehenden) ausführlichen Begründung der Hurewiczschen Theorie ebenso wie in deren Weiterführung von Bedeutung sein. Auf die Verbindung zu den Reidemeisterschen Homotopieketten geht der Verf. in einer besonderen Veröffentlichung (vgl. nachstehendes Ref.) ein. — In einem Abschnitt über Mannigfaltigkeiten wird für einen  $m$ -dimensionalen Komplex  $K$ , der in eine Mannigfaltigkeit  $M$  eingebettet ist, eine „reguläre Nachbarschaft“ konstruiert. Im Falle, daß  $M$  ein euklidischer Raum  $E^n$  mit hinreichend hoher Dimension ( $n \geq 2m + 5$ ) ist, gilt folgendes: Stimmen die Fundamentalgruppe und die Homologiegruppen von  $K$  mit denen eines  $k$ -Simplexes bzw. einer  $k$ -Sphäre überein, so ist eine reguläre Nachbarschaft von  $K$  ein  $n$ -Simplex bzw. das topologische Produkt aus  $k$ -Sphäre und  $(n - k)$ -Simplex. — In weiteren Abschnitten werden auch unendliche Komplexe, solche mit unendlich vielen Ecken und endlich-, jedoch nicht beschränkt-dimensionalen Simplizes betrachtet. Deren kombinatorische und stetigkeitstopologische Theorie wird entwickelt und die Ausdehnungsmöglichkeiten der Resultate auf diesen Fall werden untersucht.

Wolfgang Franz (Gießen).

Whitehead, J. H. C.: On certain invariants introduced by Reidemeister. Quart. J. Math., Oxford Ser. 10, 81—83 (1939).

In dieser Arbeit wird eine Beziehung zwischen der vom Verf. kürzlich aufgestellten Theorie der Nuclei und  $m$ -Gruppen (vgl. vorsteh. Ref.) und der vom Ref. entwickelten Theorie der Homotopiekettenringe hergestellt. Es wird gezeigt, daß die Invarianten des Homotopiekettenringes eines endlichen Simplicialkomplexes Invarianten der Homotopieklasse im Sinne von Hurewicz (dies. Zbl. 13, 229) des Komplexes sind. Daraus folgt insbesondere, daß diese Invarianten auch im Sinne der Stetigkeitstopologie invariant sind.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Rham, Georges de: Sur les complexes avec automorphismes. Comment math. helv. 12, 191—211 (1940).

Es sei ein topologischer Komplex  $C$  gegeben und eine abstrakte Gruppe  $G$  derart, daß jedem Element  $\gamma$  von  $G$  ein ihm homomorph zugeordneter Automorphismus  $T(\gamma)$  von  $C$  entspricht. Ein solcher Komplex mit Automorphismen  $[C, T(\gamma)]$  wird als isomorph mit einem anderen zur selben Gruppe  $G$  gehörigen Komplex  $[C', T'(\gamma)]$  betrachtet, wenn ein Isomorphismus  $S$  von  $C$  und  $C'$  existiert, so daß  $T'(\gamma) = ST(\gamma)S^{-1}$  gilt für jedes  $\gamma$  von  $G$ . Der wichtigste Sonderfall, in dem die Automorphismen  $T(\gamma)$  fix-elementfrei sind, d. h. keine Zelle des Komplexes  $C$  invariant lassen, insbesondere der Fall, daß die Automorphismengruppe sich aus der Deckbewegungsgruppe einer regulären Überlagerung von  $C$  ableiten läßt, ist in einer Reihe von Arbeiten von K. Reidemeister (s. z. B. dies. Zbl. 12, 126 u. 14, 137) und dem Ref. (dies. Zbl. 15, 84) untersucht worden. Hier werden für den allgemeinen Fall die entsprechenden Begriffsbildungen eingeführt und weiter untersucht. Mit Hilfe des Gruppenringes von  $G$  ergeben sich Bedingungen für die kombinatorische Äquivalenz zweier Komplexe mit Automorphismen. Von besonderer Wichtigkeit ist der Übergang vom Gruppenring zu den Restklassen nach einem Ideal, insbesondere einem Primideal des Gruppenringes. Ist der Restklassenbereich ein kommutativer Körper, so wird für gewisse aus den verallgemeinerten Kettengruppen und den Bettischen Gruppen zusammengesetzte Gruppen eine Isomorphie bewiesen, welche nach Art der Euler-Poincaréschen Formel gebildet ist und im einfachsten Spezialfall diese Formel in Evidenz setzt, i. a. jedoch wesentlich mehr besagt. Ferner führt diese Isomorphie im fixelementfreien Falle zu einer als Determinante dargestellten Invariante für Komplexe mit Automorphismen, welche eine bis auf Elemente von  $G$  bestimmte Zahl des Restklassenbereiches ist. Im Falle, daß die universelle Überlage-



zung zugrunde gelegt wird und alle verallgemeinerten Bettischen Gruppen verschwinden, ist sie eine kombinatorische Invariante des Komplexes selbst und mit der vom Ref. eingeführten Torsion (dies. Zbl. 12, 127) identisch. Diese Invariante kann auch für den nicht fixelementfreien Fall nutzbar gemacht werden. *Wolfgang Franz.*

**Eilenberg, Samuel:** Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques. *Compositio Math.* 6, 428—433 (1939).

$\pi_i^m$  bezeichne die  $i$ -te Homotopiegruppe der  $m$ -Sphäre  $S^m$ ,  $\pi_m^m$  also speziell die Gruppe der ganzen Zahlen;  $\pi_i^{*m}$  bezeichne die dazu orthogonale kompakte topologische Gruppe im Sinne von Pontrjagin,  $\pi_m^{*m}$  also speziell die Gruppe der reellen Zahlen mod 1. Ein bekanntes Resultat von H. Hopf läßt sich so aussprechen: Die Homotopieklassen der Abbildungen eines  $m$ -dimensionalen Polyeders  $P^m$  auf die  $m$ -Sphäre  $S^m$  entsprechen umkehrbar eindeutig den stetigen Charakteren der  $m$ -ten Bettischen Gruppe  $B^m(P^m)$  mit Koeffizienten aus  $\pi_m^{*m}$  in der Gruppe  $\pi_m^{*m}$ . Hier wird folgende interessante Verallgemeinerung über die stetigen Abbildungen eines  $n$ -dimensionalen Polyeders  $P^n$  auf  $S^m$  bewiesen. Genügt  $P^n$  den Bedingungen: (1)  $B^i(P^n)$  mit Koeffizienten aus  $\pi_i^{*m}$  verschwindet, (2)  $B^{i+1}(P^n)$  mit Koeffizienten aus  $\pi_i^{*m}$  verschwindet ( $i = m + 1, m + 2, \dots$ ), so entsprechen die Abbildungsklassen umkehrbar eindeutig den stetigen Charakteren von  $B^m(P^n)$  mit Koeffizienten aus  $\pi_m^{*m}$  in der Gruppe  $\pi_m^{*m}$ . Bedingung (1) entscheidet über die Zugehörigkeit zweier Abbildungen zur gleichen Klasse, Bedingung (2) ergibt die Existenz einer Abbildung mit gegebenem Charakter. Als Spezialfall ergibt sich der Satz, daß ein Polyeder dann und nur dann in allen Dimensionen azyklisch ist, wenn jede stetige Abbildung auf eine Sphäre unwesentlich ist. (Vgl. K. Borsuk, dies. Zbl. 16, 139, ferner die etwas später als die vorliegende Arbeit erschienene Note von A. Komatu und R. Sakata, dies. Zbl. 22, 172.) Der Beweis beruht auf einer sehr einfachen Anwendung einer Arbeit des Verf. über Erweiterungen von Abbildungen (dies. Zbl. 19, 332). *Wolfgang Franz* (Gießen).

**Fox, Ralph H.:** On homotopy and extension of mappings. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 26, 26—28 (1940).

Verf. beweist vor allem folgenden Satz: Sei  $A$  ein Kompaktum und  $Y$  ein absoluter Umgebungsretrakt; damit eine Abbildung  $f$  aus  $Y^A$  homotop sei zu einer konstanten Abbildung (d. h. zu einer Abbildung auf einen Punkt), ist notwendig und hinreichend, daß  $f$  erweitert werden kann auf jeden regulären separablen Raum  $\supset A$ . Hieraus ergibt sich neuer Beweis für einen bekannten Satz von Borsuk [*Fundam. Math.* 19, 229 (1932); dies. Zbl. 5, 264] und eine neue Charakterisierung der Kategorie [im Sinne von Lusternik und Schnirelmann, vgl. Borsuk, *Fundam. Math.* 26, 123 (1936); dies. Zbl. 13, 422] für absolute Umgebungsretrakte des Hilbertschen Parallelotops. Weiter wird bewiesen: Damit  $f$  aus  $Y^A$   $n$ -homotop sei zu einer konstanten Abbildung, ist hinreichend, daß  $f$  erweitert werden kann auf jedes höchstens  $(n + 1)$ -dimensionale Kompaktum  $\supset A$ . Schließlich beweist Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Teilmenge  $B$  eines separablen, regulären Raumes  $Y$  stetig deformiert werden kann in eine andere (vorgegebene) Menge  $B'$  von  $Y$  bzw. in (eine Teilmenge von)  $Y - B$  bzw. einen Punkt von  $Y - B$ . *Nöbeling* (Erlangen).

**Hall, Dick Wick:** An example in the theory of pointwise periodic homeomorphisms. *Bull. Amer. Math. Soc.* 45, 882—885 (1939).

Eine eindeutige, stetige Abbildung  $T(M) = M$  einer Menge  $M$  auf sich heißt punktweise periodisch, wenn für jeden Punkt  $x$  von  $M$  ein natürliches  $N = N(x)$  existiert derart, daß  $T^N(x) = x$  gilt (ist  $N$  unabhängig von  $x$  wählbar, so heißt  $T$  periodisch; selbst wenn  $M$  ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist, braucht ein punktweise periodischer Homöomorphismus von  $M$  auf sich noch nicht periodisch zu sein, wie ein demnächst erscheinendes Beispiel von Phillips und Ayres zeigt); die kleinste Zahl  $N(x)$  heißt die Periode von  $x$ ; die Menge der Bilder  $T(x)$ ,  $T^2(x)$ ,  $\dots$ ,  $T^N(x)$  heißt die Bahn von  $x$ . Verf. konstruiert im vierdimensionalen euklidischen Raum ein lokal zusammenhängendes Kontinuum  $M$  mit einem punktweise periodischen Homöo-

morphismus  $T(M) = M$ , welches eine konvergente Folge von Bahnen enthält, deren Limes  $L$  Punkte mit vorgegebenen Perioden  $r_1, r_2, \dots$  enthält [der Limes von Bahnen kann also Punkte mit verschiedenen Perioden enthalten; dafür ein erstes Beispiel, das jedoch kein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist, bei Hall und Schweigert, Duke math. J. 4, 723 (1938); dies. Zbl. 20, 79]. Nöbeling (Erlangen).

**Harrold jr., O. G.:** The non-existence of a certain type of continuous transformation. Duke math. J. 5, 789—793 (1939).

Es ist nicht möglich, einen Jordanbogen auf einen Raum  $B$  stetig so abzubilden, daß jedem Bildpunkt genau  $k = 2$  Originalpunkte des Bogens entsprechen (für jedes andere  $k$  ist eine solche Abbildung aufweisbar, für  $k > 2$  sogar unter der Annahme, daß  $B$  eine Jordankurve sei). Furch (Rostock).

**Puckett jr., W. T.:** On 0-regular surface transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 95—113 (1940).

Die eindeutige, stetige Abbildung  $T(M) = M'$  des kompakten metrischen Raumes  $M$  heißt 0-regulär, wenn für jede konvergente Punktfolge  $x'_i \rightarrow x'$  aus  $M'$  die Urbildmengen  $X_i = T^{-1}(x'_i)$  0-regulär gegen  $X = T^{-1}(x')$  konvergieren, d. h. wenn  $X = \lim X_i$  ist und für jedes  $\varepsilon > 0$  ein natürliches  $i_0$  und ein  $\delta > 0$  existiert, so daß je 2 Punkte aus  $X_i (i > i_0)$  mit einem Abstand  $< \delta$  in einem Teilkontinuum von  $X_i$  mit einem Durchmesser  $< \varepsilon$  liegen; gleichbedeutend hiermit ist:  $T$  bildet offene Mengen von  $M$  auf offene Mengen von  $M'$  ab, und die Urbildmengen der Punkte von  $M'$  sind gleichmäßig lokal zusammenhängend. Verf. betrachtet solche Abbildungen  $T$  für 2-dimensionale Pseudomannigfaltigkeiten  $M$  (dieselben gehen aus 2-dimensionalen berandeten oder geschlossenen Mannigfaltigkeiten hervor durch Identifikation endlich vieler Punkte). Ist  $T$  außerdem monoton (d. h. ist das Urbild jedes Punktes zusammenhängend), so ist  $T$  entweder topologisch oder  $M'$  ist ein Punkt, ein Bogen oder eine einfach geschlossene Kurve. Der Fall des Bogens ist nur möglich, wenn  $M$  eine Sphäre, eine 2-Zelle oder ein Kreisring ist; der Fall der einfach geschlossenen Kurve nur, wenn  $M$  ein Torus, ein Kleinscher Schlauch, ein Kreisring, ein Möbiussches Band, eine Sphäre mit 2 identifizierten Punkten oder eine 2-Zelle mit 2 identifizierten Randpunkten ist. Nöbeling (Erlangen).

**Whyburn, G. T.:** On irreducibility of transformations. Amer. J. Math. 61, 820—822 (1939).

$A$  étant un ensemble distancié compact, la transformation  $T(A) = B$  s'appelle irréductible, s'il n'existe aucun vrai sous-ensemble fermé  $C$  de  $A$  tel que  $T(C) = B$ . Lorsque  $A$  est un continu,  $T(A) = B$  s'appelle irréductible en sens strict, si l'on a  $T(C) \neq B$  pour tout vrai sous-continu  $C$  de  $A$ . L'auteur démontre les théorèmes suivants: 1. La condition nécessaire et suffisante pour que  $T(A) = B$  soit irréductible en sens strict est que l'ensemble  $D$  des points  $x \in A$  pour lesquels  $x = T^{-1}T(x)$ , soit dense dans  $A$ . 2.  $A$  étant un continu localement semi-connexe (la définition de cette propriété v. Whyburn, ce Zbl. 21, 359), la condition nécessaire et suffisante pour que  $T(A) = B$  soit irréductible est que  $D$  soit dense dans l'ensemble  $N$  de tous les points  $x \in A$  qui ne séparent pas  $A$ . 3.  $A$  étant un continu semi-localement connexe, la condition nécessaire et suffisante pour que toute transformation irréductible de  $A$  soit irréductible en sens strict est  $\bar{N} = A$ . 4. Si  $A$  est compact et  $T(A) = B$  une transformation intérieure irréductible en sens strict, alors  $T$  est une homéomorphie. 5. Si  $A$  est un continu semi-localement connexe, les mots „en sens strict“ peuvent être supprimés dans l'énoncé 4. G. Alexits (Budapest).

**Radó, Tibor, and J. W. T. Youngs:** On upper semicontinuous collections. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 239—243 (1940).

$S_1$  being an  $L$ -space such that  $a_n \rightarrow a$  implies that there is a subsequence  $a_{n_j} \rightarrow b \neq a$ , the paper gives the following condition necessary and sufficient for a mapping  $T$  of  $S_1$  onto a set  $S_2 = T(S_1)$  to be continuous with a suitable topology on  $S_2$ , which is then uniquely determined:  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , and  $T(a_n) = T(b_n)$



imply that  $T(a) = T(b)$ ; whence there follows the equivalence of the notions of so-called upper semi-continuity introduced independently by Alexandroff, Kerékjártó, and Moore. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Koutský, Karel:** Sur quelques modifications d'une topologie donnée. Acad. Tchéque Sci., Bull. int. **39**, 111—115 (1939).

L'auteur donne quelques conditions d'existence de certaines topologies qu'on déduit en modifiant une topologie donnée et qui jouissent de propriétés prescrites. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Elsholz, L.:** Die Länge einer Mannigfaltigkeit und ihre Eigenschaften. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 565—570 u. deutsch. Zusammenfassung 571 (1939) [Russisch].

Über den Begriff der Länge  $\text{long}_M A$  einer abgeschlossenen Menge  $A$  in einer Mannigfaltigkeit  $M$  (vgl. S. Froloff und L. Elsholz, dies. Zbl. **13**, 270) werden unter anderem folgende Sätze bewiesen. 1. Ist  $N$  in  $M$  enthalten, so ist  $\text{long}_N A \geq \text{long}_M A$ . 2. Es gilt  $\text{long}_M M \geq R(M)$ , wo  $R(M)$  der Rang der Mannigfaltigkeit  $M$  ist. 3.  $\text{long}_M A \leq k_M A - 1$ , wo  $k_M A$  die kombinatorische Kategorie der Mannigfaltigkeit  $M$  ist. 4. Die Bettischen Zahlen einer Mannigfaltigkeit bestimmen nicht ihre Länge. — Ferner werden Sätze über die Länge von Summen- und Produktmengen angegeben. *Wolfgang Franz*.

**Friedgé, Hans:** Verallgemeinerung der Dodekaederräume. Math. Z. **46**, 27—44 (1940).

Der sphärische Dodekaederraum (s. C. Weber und H. Seifert, dies. Zbl. **7**, 28) entsteht, wenn man an einem massiven Dodekaeder je zwei Gegenflächen, um  $\frac{\pi}{5}$  gleichsinnig gegeneinander verschraubt, miteinander identifiziert. Hier wird dieser Prozeß zur Bildung von Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. An Stelle des Dodekaeders wird ein Polyeder benutzt, das von zwei  $n$ -Ecken mit je einem Kranz von  $n$  anschließenden Fünfecken begrenzt wird. Durch eine entsprechende Identifizierung entstehen Mannigfaltigkeiten, welche je nach der Restklasse von  $n \bmod 6$  verschiedenes Verhalten zeigen. Ihre numerischen Invarianten und ihre Fundamentalgruppen werden aufgestellt. Für  $n \equiv \pm 1 \bmod 6$  ergeben sich Poincarésche Räume, deren Fundamentalgruppen isomorph sind zu den Fundamentalgruppen derjenigen Poincaréschen Räume, die man aus der Kleeblattschlinge ableiten kann. Sie erweisen sich sogar als homöomorph mit diesen Räumen, und zwar vermöge eines Satzes von H. Seifert über die Faserung von Poincaréschen Räumen, welche sich aus Torusknoten ableiten lassen (dies. Zbl. **6**, 83). Durch Modifizierung der Identifizierungsvorschrift ergeben sich weitere Mannigfaltigkeiten, deren numerische Invarianten und Fundamentalgruppen angegeben werden. Es wird gezeigt, daß sie mit den Linsenräumen trotz der Übereinstimmung in den numerischen Invarianten nicht homöomorph sind. *Wolfgang Franz* (Gießen).

**Yamauti, Syôzô:** Zwei Bemerkungen über den Produktraum. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 609—614 (1939).

Verf. gibt erstens eine Ungleichung für die Urysohnschen Konstanten [im Sinne von Alexandroff, Fundam. Math. **20**, 141 (1933); dies. Zbl. **6**, 426] eines Produktraumes; zweitens wird bewiesen, daß die  $n$ -dimensionale Homotopiegruppe eines Produktes  $R_1 \times R_2$  gleich ist der direkten Summe der  $n$ -dimensionalen Homotopiegruppen von  $R_1$  und  $R_2$ . *Nöbeling* (Erlangen).

**Sirvint, G.:** Zur Geometrie linearer Räume. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 119—122 (1940).

Verf. formuliert ohne Beweise elf Sätze, in denen der Begriff der Umkreisung eine Rolle spielt; dabei heißt eine Menge  $U$  (eines linearen Raumes) eine Umkreisung eines Punktes  $x$ , wenn  $U$  mit jeder durch  $x$  gehenden Geraden ein  $x$  im Innern enthaltendes Intervall gemein hat. Einer dieser Sätze lautet: Damit ein linearer Raum 2. Kategorie normierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß in ihm eine konvexe, beschränkte Umkreisung vorhanden sei (Verschärfung eines Satzes von Kolmogoroff unter Verengung des Gültigkeitsbereiches). *Nöbeling* (Erlangen).

**Rothe, Erich:** The theory of topological order in some linear topological spaces. Iowa State Coll. J. Sci. **13**, 373—390 (1939).

The space  $E$  considered is 1. topological ("accessible", in the sense of Fréchet), 2. linear, with continuous operations, and such that 3. the zero point  $0$  has at least one convex neighborhood  $U$  which is "bounded", that is has the property that for every sequence  $\{\alpha_n\}$  of real numbers converging to zero and an arbitrary sequence  $\{x_n\}$  of points of  $U$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = 0$ .  $V$  is a closed convex bounded set in  $E$  containing at least one interior point and  $S$  its boundary. The order  $u(f, S, y_0)$  of a point  $y_0 \in E$ , not lying on the image  $f(S)$  of  $S$ , where  $f(x) = \lambda(x) \cdot x + F(x)$  [ $\lambda(x)$  a continuous function for  $x \in S$ , with  $0 < m \leq \lambda(x) \leq M$ , and  $F(x)$  a completely continuous representation of  $S$ ], is defined (for that purpose  $E$  is normed, and it is shown that the order is independent of the special norm which has been introduced). A number of properties of the order, well known for  $n$ -dimensional spaces, are proved in  $E$ . The author also considers a space  $E$ , which is normed and "strictly convex" (in this case, for two elements  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $|x + y| = |x| + |y|$  then and only then, when, for a suitable positive  $c$ ,  $x = cy$ ). In this case the equality of the two orders of a point  $y_0$  with respect to two representations  $f(x)$  of  $S$  is not only necessary but also sufficient for the homotopy of the two representations in  $E - y_0$ . Also the homotopy of two representations of an  $S$  into an  $S_1$  is considered, and a necessary and sufficient condition is derived. Cf. Rothe, Compositio Math. **5**; this Zbl. **18**, 133.

*J. Ridder* (Groningen).

**Alexandroff, P.: Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume.** Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 403—420 u. deutsch. Zusammenfassung 420—423 (1939) [Russisch].

Nach Čech besitzt jeder vollständig reguläre Raum  $R$  eine bikompakte Erweiterung  $\beta R$  (d. h.  $\beta R$  ist ein bikompakter Hausdorffscher Raum, welcher  $R$  als dichte Teilmenge enthält), die wie folgt gekennzeichnet werden kann:  $\beta R$  kann auf jede bikompakte Erweiterung von  $R$  unter Festhaltung sämtlicher Punkte von  $R$  abgebildet werden. Verf. untersucht die Beziehungen von  $\beta R$  zu anderen wichtigen bikompakten Erweiterungen von  $R$ . Z. B. sei  $\omega R$  der Wallmannsche Raum aller maximalen Klassen  $\mathfrak{G}$  abgeschlossener Mengen in  $R$  mit nicht leeren Durchschnitten zu je endlich vielen. Eine offene Basis besteht aus allen  $\omega R - F'$ , wo  $F'$  aus allen  $\mathfrak{G} \in \omega R$  mit  $F \in \mathfrak{G}$  ( $F$  abgeschlossen in  $R$ ) besteht. Man identifiziere noch  $x \in R$  mit der Klasse aller abgeschl.  $F$  in  $R$  mit  $x \in F$ . Ist nun  $R$  normal, so ist  $\omega R$  eine bikompakte Erweiterung von  $R$  und mit  $\beta R$  gleichwertig. Allgemeiner ist  $\beta R$  die feinste Hausdorffsche Zerlegung von  $\omega R$ . Verf. gibt schließlich eine  $H$ -Abgeschlossenheitsbedingung an und bemerkt, daß  $\beta R$  die größte Mächtigkeit und das größte Gewicht von allen bikompakten Erweiterungen von  $R$  besitzt.

*Bedřich Pospíšil* (Brünn).

**Katětov, Miroslav:** Über  $H$ -abgeschlossene und bikompakte Räume. Čas. mat. fys. **69**, 36—49 (1940).

Es sei  $R$  ein allgemein-topologischer Raum (Alexandroff-Hopf, Topologie I, S. 25; dies. Zbl. **13**, 79). Verf. schreibt  $uM$  statt  $\bar{M}$ . Ist  $vM$  eine zweite, von  $u$  verschiedene topologische Zuordnung und stets  $uM \subset vM$ , so heißt die Zuordnung  $v$  stärker als  $u$ . Eine Hausdorffsche Topologie  $u$  heißt maximal, wenn es keine stärkere Hausdorffsche Topologie in  $R$  gibt. Verf. beweist u. a. folgende Sätze: 1. Für die Bikompaktheit eines Hausdorffschen Raumes  $R$  (kurz  $H$ -Raum) ist jede der beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: a) je 2 verschiedene Punkte aus  $R$  besitzen disjunkte abgeschlossene Umgebungen, und die Topologie von  $R$  ist maximal; b) jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $R$  ist  $H$ -abgeschlossen, d. h. abgeschlossen in jedem  $A$  als Teilraum enthaltenden  $H$ -Raum [zu b) vgl. M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375 (1937); dies. Zbl. **17**, 135]. 2. Zu jedem  $H$ -Raum existiert eine  $H$ -abgeschlossene Hülle, d. h. ein  $H$ -Raum  $S$  mit folgenden drei Eigenschaften: a)  $R$  ist Teilraum von  $S$  und  $\bar{R} = S$ ; b)  $S$  ist  $H$ -abgeschlossen; c) ist  $f$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $R$  in einen  $H$ -Raum  $Q$  mit  $f(\bar{R}) = Q$ , so gibt es eine Menge  $M$



mit  $R \subset M \subset S$  und eine auf  $R$  mit  $f$  identische eindeutige, stetige Abbildung  $F$  von  $M$  auf  $Q$ . — Ist  $Q$  bikompakt, so kann man  $M = S$  wählen. — Besitzt ein  $H$ -Raum  $S'$  die Eigenschaften a) bis c) in bezug auf einen  $H$ -Raum  $R'$  und existiert eine Homöomorphie zwischen  $R$  und  $R'$ , so kann man dieselbe erweitern zu einer Homöomorphie zwischen  $S$  und  $S'$ . — 3. Neuer Existenzbeweis für die bikompakte Hülle eines vollständig regulären Raumes [Stone, l. c., E. Čech, Ann. of Math. (2) 38, 823 (1937); dies. Zbl. 17, 428].

Nöbeling (Erlangen).

**Wilder, R. L.:** Property  $S_n$ . Amer. J. Math. 61, 823—832 (1939).

Verf. definiert: Eine Menge  $M$  eines metrischen Raumes hat die Eigenschaft  $S_n$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei Summendarstellungen  $M = \sum_{i=1}^k U_i$  und  $M = \sum_{i=1}^k V_i$  von  $M$  mit  $U_i \supset V_i$  und  $\delta(U_i) < \varepsilon$  existieren derart, daß gilt: Für jedes Indexsystem  $i_1, \dots, i_n$  gibt es in  $V_{i_1} + \dots + V_{i_n}$  höchstens endlich viele  $n$ -Zyklen (im Sinne von Vietoris), die linear unabhängig sind bez. Berandung in  $U_{i_1} + \dots + U_{i_n}$ . (Unterwirft man die  $n$ -Zyklen der Einschränkung, daß sie in einer speziellen Gruppe  $G$  enthalten sein sollen, so erhält man den Begriff der Eigenschaft  $S_n$  bez. der Gruppe  $G$ .) Die Eigenschaft  $S_0$  ist äquivalent mit der bekannten Eigenschaft  $S$  (Darstellbarkeit als Summe endlich vieler zusammenhängender Mengen  $< \varepsilon$ ). Die Eigenschaft  $S_n$  ist stärker als der lokale  $n$ -Zusammenhang; bei  $n > 0$  sogar für kompaktes  $M$ . Jedoch gilt: Damit ein kompakter, metrischer Raum lokal  $n$ -zusammenhängend ist für  $0 \leq n \leq m$ , ist notwendig und hinreichend, daß er die Eigenschaft  $S_n$  habe für  $0 \leq n \leq m$  (für  $m = 0$  Satz von R. L. Moore). Das Gebiet  $D$  des euklidischen  $E_m$  sei einfach  $(m-1)$ -zusammenhängend [d. h.  $p^{m-1}(D) = 0$ ] und habe die Eigenschaften  $S_n$  für  $0 \leq n \leq m-2$ ; dann ist die Begrenzung  $B$  von  $D$  ein Peanokontinuum (für  $m = 0$  auch umgekehrt; Satz von R. L. Moore). Damit ein Kontinuum  $K$  der euklidischen  $n$ -Sphäre  $H_n$  ein Peanokontinuum sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $H_n - K$  die Eigenschaft  $S_{n-2}$  bez. der Gruppe  $B^{n-2}$  der in  $H_n - K$  berandenden  $(n-2)$ -Zyklen besitze. Verf. betrachtet weiter Beziehungen von  $S$ -Eigenschaften einer Menge  $\subset E_m$  (oder  $\subset H_m$ ) bzw. ihres Komplements zum lokalen  $n$ -Zusammenhang, gleichmäßig lokalen Zusammenhang, Vermeidbarkeitseigenschaften von  $M$ .

Nöbeling (Erlangen).

## Klassische theoretische Physik.

### Mechanik:

● **Cisotti, Umberto:** Meccanica razionale. 3. ediz. rinnovata con l'aggiunta di esercizi e complementi. Milano: Libr. edit. politecn., Cesare Tamburini fu Camillo 1939. XV, 447 pag. e 231 Fig. L. 90.—

Die vorliegende dritte Auflage des bekannten Lehrbuches der Mechanik unterscheidet sich von den beiden vorangehenden in erster Linie durch die Aufnahme von „Übungsbeispielen und Zusätzen“ (etwa 50 Seiten Kleindruck), die, am Schluß eines jeden der 15 Kapitel angefügt, viele Ergänzungen bringen, deren Behandlung innerhalb der überaus klaren und geradlinigen Entwicklungen des Textes vielleicht störend empfunden worden wäre, die aber doch zur Abrundung des Ganzen wesentlich beitragen. Eine weitere glückliche Ergänzung bildet ferner die Einschaltung eines eigenen Kapitels über Tensoren vor Erörterung der Hydrodynamik und Elastizitätslehre, worin die Grundbegriffe und wichtigsten Rechenoperationen mit Tensoren in einem für die Mechanik der Continua ausreichenden Umfang vorbildlich behandelt werden.

Schoblik (Brünn).

**Wintner, Aurel:** On a precession formula. Ann. Chaire Phys. Math., Kiev 4, 177—183 (1939).

Verf. unternimmt eine neue Ableitung einer asymptotischen Formel für die Perioden gewisser integrierbarer Bewegungen, die, wie er angibt, in der ursprünglichen Arbeit von P. Fatou, „Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe“, Acta Astronom., ser. a 2, 101—164 (1931), fehlerhaft entwickelt wurde. Mit der neuen Formel werden die Perihelbewegung und Rotverschiebung der Relativitätstheorie abgeleitet.

Hubert Slouka (Prag).

**Schäfer, Manfred: Zeitgleichung und Keplersches Problem.** Dresden: Diss. 1938. 59 S. u. 10 Abb.

Ohne Rücksicht auf Beobachtungsergebnisse zu nehmen, versucht der Verf. die astronomische Zeitgleichung nur auf theoretische Ansätze zu gründen. Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil wird das Zweikörperproblem behandelt, Verf. formuliert das Keplersche Problem und stellt die Zeit- und Ortskoordinaten eindeutig durch die exzentrische Anomalie dar, wobei also diese die uniformisierende Veränderung des Bewegungsproblems vorstellt. Es folgt eine Kritik der Reihenentwicklung der Keplerschen Gleichung, wobei Verf. darauf aufmerksam macht, daß vom Standpunkt des reinen Mathematikers die Lösung nicht befriedigend ist, obwohl sie für die Anwendung genügt. Im zweiten Teil entwickelt der Verf. die analytische Theorie der Keplerschen Gleichung auf funktionentheoretischer Grundlage. Im dritten Teil seiner Arbeit verbessert der Verf. den Ansatz für die wahre Anomalie, indem er das Mehrkörperproblem in Betracht zieht. Er behandelt getrennt den Einfluß der Planeten auf die Bewegung der Erde sowie den Einfluß des Mondes und die Lunisolarpräzession und Nutation. Seine Untersuchungen schließt der Verf. mit der zweckmäßigsten Methode der numerischen Berechnung der Zeitgleichung und mit einer Übersicht der notwendigen astronomischen Konstanten.

*Hubert Slouka (Prag).*

**Tarassachvili, J.: Sur la variation de demi-grande axe de l'orbite d'une comète à une distance considérable du soleil.** Astron. J. Soviet Union 16, Nr 5, 66—71 u. franz. Zusammenfassung 71 (1939) [Russisch].

Es wird die Bewegung von Kometen untersucht, die sich in großer Entfernung von der Sonne bewegen. Mit wachsender Entfernung  $R$  von der Sonne wächst auch der Wert  $1/a$ , wo  $a$  die Halbachse der Oskulationsbahn vorstellt. Zu diesem Resultat gelangt der Verf., indem er anstatt des Sonnensystems das Modell von Fatou benutzt, das alle Planeten durch Gaußsche Kreisinge ersetzt, die ein gemeinsames Zentrum in der Sonne haben. Das erwähnte Resultat gilt ohne Ausnahme für Kometenbewegungen, welche in der gemeinsamen Kreisebene der Planeten sich bewegen. Diese Untersuchung ergänzt die Arbeiten von Thraen, Faye und E. Strömgren.

*Slouka (Prag).*

**Belorizky, D.: Sur la stabilité dans le problème des trois corps.** Bull. Sci. math., II. s. 62, 271—288 (1938).

Verf. zeigt, daß die Sundmannschen Reihen des Dreikörperproblems, wiewohl sie für die praktische Herstellung der Lösung wegen der langsamen Konvergenz ungeeignet sind, doch wenigstens im Prinzip Anhaltspunkte für die Stabilität liefern; eine notwendige Bedingung besagt z. B., daß der  $n$ -te Koeffizient jeder Reihe von der

Ordnung  $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  ist. Wie an explizit bekannten Bewegungsfällen gezeigt wird, ist

dies keineswegs auch eine hinreichende Bedingung. Auch eine solche gibt der Verf. an; sie ist z. B. für die Lagrangesche Dreieckslösung und die elliptische Bewegung erfüllt, liefert aber im allgemeinen Fall vorläufig nichts zur effektiven Lösung des Stabilitätsproblems.

*E. Hölder (Braunschweig).*

**Athen, Hermann: Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnscharen und ihrer Veränderung durch Variation der ballistischen Grundwerte.** Z. angew. Math. Mech. 19, 361—371 (1939).

Für die in der Praxis häufig vorkommende Aufgabe, eine ganze Flugbahnschar für eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und deren Veränderung durch Variation der  $v_0$  und der außenballistischen Faktoren zu berechnen, wird eine neue Methode angegeben, welche mit lediglich 2 bis 3 Bahnrechnungen die ganze Flugbahnschar einschließlich ihrer Variationen zu bestimmen gestattet. Verf. geht dabei im Anschluß an Popoff von rasch konvergierenden Reihenentwicklungen nach einem Parameter  $\lambda = \lambda(\varphi)$  ( $\varphi$  = Abgangswinkel) aus, die bei Abbrechen nach dem zweiten Glied praktisch befriedigende Ergebnisse liefern. Numerische Beispiele erläutern den Vorteil der beschriebenen Methode.

*Garten.*



## Elastizität, Akustik:

**Waters, E. O.: Hamilton's principle and the principle of least action in the solution of creep problems involving relaxation.** *Stephen Timoshenko-Festschr.* 231—239 (1938).

Zunächst wird an Hand von elementaren, exakt lösbaren Beispielen die Anwendbarkeit des Hamiltonschen Prinzips zur Lösung von Problemen der Mechanik gezeigt. Bei nichtkonservativen Systemen konstruiert Verf. ein entsprechendes konservatives, dessen Lösung bei gegebenem Grad der Annäherung mit derjenigen des gegebenen zusammenfällt. Dieser Gedanke wird auf das eindimensionale Problem des Kriechens bei verschwindender totaler Deformationsgeschwindigkeit (Relaxation) angewandt und die Lösung mittels der direkten Methode unter Benutzung einer einzigen freien Konstanten in guter Übereinstimmung mit der exakten Lösung gefunden. *F. Odqvist.*

**Kappus, Robert: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. II.** *Z. angew. Math. Mech.* 19, 344—361 (1939).

Im 1. Teil hat Verf. die fundamentalen Formeln für die allgemeine Elastizitätstheorie beliebig großer Verformungen entwickelt. Der 2. Teil enthält sehr wertvolle Anwendungen dieser Theorie. Verf. behandelt zunächst die Torsion des zylindrischen Stabes mit konstanter Spannungsverteilung längs der Stabachse unter Beschränkung auf kleine Verzerrungen. Die Verschiebungen eines beliebigen Stabpunktes  $x, y, z$  lauten  $u = \partial\varphi(y, z) + \varepsilon_0 x$ ;  $v = -y(1 - \cos X) - z \sin X$ ;  $w = -z(1 - \cos X) + y \sin X$ . Dabei ist die Verwindung

$\vartheta = \frac{dX}{dx}$  konstant. Der Drehwinkel  $X$  und die Verschiebungsableitungen brauchen dabei nicht unbedingt klein zu sein. Verf. zeigt, daß für  $\varphi(y, z)$  die Laplacesche Differentialgleichung  $\Delta\varphi = 0$  gilt mit der Randbedingung, daß am Querschnittsrand die Schubspannung in Richtung des Randes verlaufen soll; also  $\frac{dy}{dz} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} = \frac{k_{xy}}{k_{xz}} = \frac{G\vartheta(\partial\varphi/\partial y - z)}{G\vartheta(\partial\varphi/\partial z + y)}$ . Dies sind dieselben

Beziehungen wie in der Saint Venantschen Torsionstheorie, die dort unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen abgeleitet werden. — Als 2. Beispiel behandelt Verf. die Biegung eines Stabes. Wenn  $x$  die Stabachse,  $z$  die Hauptträgheitsachse des Stabes und die  $xz$ -Ebene die Ebene der Beanspruchung ist, so sind die Spannungsgrößen  $k_{yy}, k_{zz}, k_{yz}, k_{zy}$  zu vernachlässigen. Weiter benutzt Verf. die bekannte Hypothese, daß bei der Biegung die Stabquerschnitte eben und senkrecht zur Stabmittellinie bleiben, und setzt ferner  $\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$ . Für

die Verschiebung  $w(x)$  eines Punktes der Stabmittellinie erhält Verf. die bekannte Differentialgleichung der Eulerschen Elastika in der Form  $\frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} + \frac{P}{EJ}w = 0$ . Eine ausführliche

Diskussion der übrigen Verzerrungs- und Spannungsgrößen schließt sich daran an. — Die Verschiebungsdifferentialgleichungen, die Verf. im 1. Teil abgeleitet hat, sind im Gegensatz zu denen der klassischen Elastizitätstheorie nicht linear. Dies bedingt, daß bei bestimmten „kritischen“ Belastungen auch Gleichgewichtslagen existieren können, die unendlich benachbart sind. Dieser Zustand ist der bekannte indifferente Gleichgewichtszustand. Für die kritischen Verrückungen, d. h. für die Differenz der Verschiebungen der kritischen Gleichgewichtslagen zu ihren unendlich benachbarten Gleichgewichtslagen leitet Verf. drei lineare homogene Differentialgleichungen ab, die bekanntlich nur bei gewissen kritischen Fällen von Null verschiedene Lösungen besitzen. Als Beispiel behandelt Verf. die ausknickende Platte, bei der in der Plattenebene ( $x, y$ -Ebene) die über die Wanddicke gleichmäßig verteilten Längs- und Querspannungen wirken sollen. Aus den Differentialgleichungen für die kritischen Verrückungen ergibt sich, daß im allgemeinen eine Kombination der beiden folgenden Arten der Plattenknickung eintritt: entweder Ausbeulen der Platte senkrecht zur Plattenebene oder Knicken in der Plattenebene. — Als weiteres Beispiel, daß gewisse „kleine“ Knickglieder von wesentlicher Bedeutung sein können, betrachtet Verf. die Torsionsknickung des kreiszylindrischen Rohres. — Zum Schluß wendet sich Verf. der schon von Trefftz und Marguerre ausführlich behandelten energetischen Methode zur Lösung von Stabilitätsproblemen zu, die gegenüber der vormals behandelten Methode den rechnerisch praktischen Vorteil besitzt, daß auf Grund der bekannten Näherungsmethoden von Ritz, Trefftz-Friedrichs gute Approximationen für die Lösung erreicht werden können, da die Indifferenzbedingung der kritischen Verrückungen durch eine Variationsgleichung gegeben ist. Als Beispiel wird der Eulerstab ausführlich behandelt. *Wegner (Heidelberg).*

**Bazant, Zdeněk: Théorie de l'enveloppe cylindrique, sollicitée par une pression radiale variable.** *Acad. Tchèque Sci., Bull. int.* 39, 116—122 (1939).

Verf. untersucht die Spannungsverteilung in einem horizontalen, zylindrischen

Rohr, das durch einen Flüssigkeitsdruck im Innern belastet wird, der linear zur Höhe des Rohres verläuft. Die Lösung geschieht in bekannter Weise durch die Bestimmung der Airyschen Spannungsfunktion durch Ansetzen einer Reihe mit unbestimmten Koeffizienten in den acht verschiedenen Größen  $r^n \sin n\varphi$ ,  $r^n \cos n\varphi$ ,  $r^{n+2} \sin n\varphi$ ,  $r^{n+2} \cos n\varphi$ ,  $r^{-n} \sin n\varphi$ ,  $r^{-n} \cos n\varphi$ ,  $r^{2-n} \sin n\varphi$ ,  $r^{2-n} \cos n\varphi$ . Durch die Randbedingung ergeben sich für die Koeffizienten lineare Gleichungen, die der Verf. nicht näher diskutiert.

Wegner (Heidelberg).

**Koufareff, P. P.: Flexion de la barre à section équilatérale triangulaire.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 12—28 u. franz. Zusammenfassung 28 (1938) [Russisch].

**Pastori, Maria: Propagazione di un generico movimento in una membrana inestendibile.** Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 431—436 (1939).

Beweis des folgenden Satzes: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer beliebigen Bewegung in einer unausdehnbaren Membran ist gegeben durch die Quadratwurzel aus dem Quotienten der normal zur Wellenfront gerichteten Komponente der Spannung und der Dichte der Membran. Die Theorie wird durch Verwendung der Methoden des absoluten Differentialkalküls und durch Ansatz der kinematischen und dynamischen Verträglichkeitsbedingungen für die betrachtete Unstetigkeit durchgeführt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

**Karas, K.: Platten unter seitlichem Stoß.** Ing.-Arch. 10, 237—250 (1939).

Der Verf. stellt sich als erste Aufgabe, in Analogie zu den neuerdings von J. Lennertz durchgeführten Untersuchungen [Ing.-Arch. 8, 37 (1937)], welche die Arbeiten von S. Timoshenko weiterführen, aber nur den elastischen Stoß auf Balken behandeln, nun auch den elastischen Stoß auf Platten zu untersuchen. Zunächst wird aus einer Energiebetrachtung eine Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen dem dynamischen Biegepfail  $w_d$  und dem statischen Biegepfail  $w_{st}$  gegeben. Sie lautet ( $m$  stoßende Masse,  $M'$  an die Stoßstelle reduzierte Masse des gestoßenen Körpers,  $h$  Fallhöhe):

$$w_d = \frac{2}{\sqrt{m/M'} + \sqrt{M'/m}} \sqrt{2h w_{st}}.$$

Danach wird eine strenge Darstellung des Stoßvorganges gegeben. Ausgehend von den Bewegungsgleichungen für die Normalkoordinaten der Platte wird für das Stoßkraftgesetz  $P(t)$  eine Integralgleichung hergestellt. Sie wird dadurch gelöst, daß das Stoßintervall in kleine Zeitabschnitte unterteilt wird, während deren die Stoßkraft unveränderlich angenommen wird. Für den Fall der quadratischen Platten werden Hilfstafeln und -kurven angegeben. Ein Beispiel schließt sich an. — In einem zweiten Teil der Arbeit wird das Verhalten balken- und plattenförmiger Körper (Betondecken) beim unelastischen Stoß (Aufreffen von Geschossen) untersucht. Die Näherungsformel für den dynamischen Biegepfail lautet hier:

$$w_d = \sqrt{\frac{2h w_{st}}{1 + M'/m}}.$$

Sodann wird für die drei Fälle des Stoßkraftgesetzes

$$a) P = k_0, \quad b) P = k_1 z, \quad c) P = k_2 z^2$$

( $z$  = Eindringweg) die Eindringtiefe, die Stoßzeit, der Weg der Stoßstelle sowie die maximale Stoßkraft angegeben, und zwar nach zwei verschiedenen Überlegungen, nämlich 1. unter Anwendung der Gesetze des unelastischen Stoßes, 2. durch Betrachtung der Grundschrwingung des gestoßenen Körpers, nachdem für  $P(t)$  eine Annahme eingeführt wurde. Schließlich werden dieselben Überlegungen auf Platten ausgedehnt.

K. Klotter (Berlin-Charlottenburg).

### Hydrodynamik:

**Roy, Maurice: Sur les équations de l'écoulement permanent relatif d'un fluide parfait et l'hypothèse des courants.** C. R. Acad. Sci., Paris 209, 187—190 (1939).

Strömt ein Gas verlustlos ins Vakuum aus, so erreicht es bekanntlich eine gewisse



endliche Geschwindigkeit. Der Verf. bestimmt für die reibungsfreie, in einem sich drehenden Koordinatensystem stationäre Gasströmung Beziehungen zwischen dieser „Grenzgeschwindigkeit“, der Entropie und dem Absolutwirbel und zieht daraus einige Folgerungen, z. B. über die Lage der Wirbellinien bei konstanter „Grenzgeschwindigkeit“. Weiter wird überlegt, unter welchen Bedingungen es Orthogonalflächen zu den Stromlinien gibt.

A. Busemann (Braunschweig).

**Polubarinova-Kochina, P.:** On the continuity of variation of the velocity hodograph in a plane steady motion of ground waters. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 325—327 (1939).

Verf. geht für die Lösung von Grundwasserproblemen von der Konstruktion des Geschwindigkeitshodographen aus. In gewissen Fällen ergeben sich hierbei mehrdeutige Kurven, und Verf. untersucht für zwei Beispiele, welche mit dem Grundwasserstand in Deichen zusammenhängen, wie in solchen Fällen zu verfahren ist. Es handelt sich hierbei mathematisch um die Transformation (Abbildung) solcher mehrdeutiger Bereiche auf eindeutige Bereiche. Die Abbildungsfunktionen werden für die genannten zwei Fälle angegeben und ausgewertet. Verf. gibt numerische Ergebnisse an, welche bei der Auswertung der betreffenden Integrale hervorgehen.

M. J. O. Strutt.

**Dive, Pierre:** Nature analytique de la vitesse angulaire d'un astre fluide stratifié en couches ellipsoïdales. Bull. Sci. math., II. s. 63, 182—192 (1939).

Für eine ellipsoidisch geschichtete, in permanenter Bewegung befindliche heterogene Flüssigkeitsmasse beweist der Verf., daß die Winkelgeschwindigkeit auf jeder Fläche konstanter Dichte eine reguläre analytische Funktion des Abstandsquadrates zwischen dem Flüssigkeitselement und der Rotationsachse ist.

E. Hölder (Braunschweig).

### Elektrodynamik:

**Adams, E. P.:** Note on a problem in electrostatics. Quart. J. Math., Oxford Ser. 10, 241—246 (1939).

Verf. betrachtet eine ebene Aufgabe der Potentialtheorie, wobei eine Reihe von unter sich parallelen und mit ihren Mittelpunkten auf einer Geraden gelegenen äquidistanten Rechtecken in der Mitte zwischen zwei Äquipotentialgeraden gelegen sind. Letztere Geraden sind mit der zuerst genannten parallel. Der Umfang der Rechtecke ist ebenso wie die beiden parallelen Geraden auf konstantem Potential gehalten. Verf. löst diese Aufgabe durch konforme Abbildung. Der Abbildungsbereich ergibt sich aus Symmetrieüberlegungen und hat 6 Eckpunkte. Mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Methode bildet Verf. diesen Bereich auf eine Halbebene ab. Die Integrale lassen sich mittels elliptischer Funktionen lösen. Für verschiedene Rechtecksabmessungen stellt Verf. die numerischen Werte der zu diesen Funktionen gehörigen Moduln zusammen. Er kommt zu dem Schluß, daß in manchen Fällen das Ergebnis der Abbildung nicht viel von demjenigen abweicht, das mit Kreisen an Stelle der Rechtecke erhalten worden ist. Er berechnet die Ladungen auf den Rechtecken und die Kapazität den Rechtecke zu den parallelen Geraden. Das Ergebnis wird mit demjenigen verglichen, das sich für eine unendliche Reihe von parallelen Linienladungen zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Ebenen errechnet. Zum Schluß betrachtet Verf. eine Aufgabe, wobei ein einziges Rechteck zwischen zwei parallelen Ebenen gelegen ist.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Cauer, W.:** Das Poissonsche Integral und seine Anwendungen auf die Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Netzwerke). I. Elektr. Nachr.-Techn. 17, 17—30 (1940).

Der vorliegende erste Teil der Abhandlung bringt nur eine den Mathematikern im wesentlichen geläufige, doch für den Gebrauch von Ingenieuren zweckmäßige zusammenfassende Darstellung der Grundtatsachen (und ihrer Beweise) über das Poissonsche Integral. Im einzelnen knüpft Verf. vielfach an das Vorgehen von G. Herglotz an; insbesondere wird das Stieltjesintegral voll benutzt. Die Darstellung soll als Grundlage für Anwendungen (s. Titel) dienen.

Ullrich (Gießen).

**Müller, Johannes:** Untersuchung über elektromagnetische Hohlräume. Hochfrequenztechn. 54, 157—161 (1939).

Von den Maxwellschen Gleichungen ausgehend, stellt Verf. mit Hilfe des Poyntingschen Satzes die Beziehung zwischen der von außen in einen Raum eingestrahnten

Leistung und der im Raume verbrauchten bzw. pulsierenden Leistung auf. Er berechnet hieraus die Änderung dieser Leistungsbeträge bei kleinen Änderungen der Kreisfrequenz, der Mediumkonstanten im Raum, des Volumens und der Oberfläche. Diese Gleichungen werden an Hand eines einfachen Beispiels mit Hilfe der üblichen Strom- und Spannungsbegriffe erläutert. Als Erweiterung des Zobelschen Satzes, der besagt, daß die Blindleistung in einem vollständig verlustfreien System von Impedanzen (Zweipol) stets einen positiven Differentialquotienten in bezug auf die Frequenz aufweist, beweist Verf. unter gewissen Voraussetzungen den analogen Satz für elektromagnetische Hohlräume (ein analoger Satz wurde vom Ref. früher bewiesen). Wenn die Impedanz in einem Anregungspunkt eines Hohlraumes als Funktion der Frequenz gemessen wird, ergibt sich eine gewisse Halbwertsbreite der Resonanzkurve, welche Verf. in Abhängigkeit der Verluste im Hohlraum berechnet. Er gibt eine Gleichung an für die Eigenfrequenzänderung von Hohlräumen durch kleine Änderungen des Mediums und der Begrenzung. Hierauf bestimmt er die Verteilung des Betrages des elektrischen und des magnetischen Feldes in beliebig gestalteten Hohlräumen, indem er durch Änderungen der Hohlraumbegrenzung Gleichungen für die Eigenfrequenzänderungen aufstellt, welche ein Maß für die Verteilung der Energiedichten ergeben. *M. J. O. Strutt.* °°

**Döring, W.: Reversible Vorgänge in magnetischen Materialien mit kleinen inneren Spannungen.** Z. Physik 114, 579—601 (1939).

In Ergänzung der Rechnungen von R. Becker [Wiss. Veröff. Siemens-Konzern 11, 1 (1932)] über die Änderung der Remanenz durch Zug für den Fall starker innerer Spannungen wird hier der Zusammenhang zwischen dem  $\Delta E$ -Effekt (magnetisch bedingte Abweichungen vom Hookeschen Gesetz), der reversiblen Permeabilität im Remanenzpunkt und der Remanenzänderung durch Zug einerseits und der Anfangssuszeptibilität andererseits für solche Materialien abgeleitet, bei denen die Kristallenergie gegenüber dem Einfluß der inneren Spannungen überwiegt. Über die inneren Spannungen wird die Annahme gemacht, daß sie im Mittel isotrop sind. Die abgeleiteten Formeln werden für den Fall ausführlich diskutiert, wo die Raumdiagonale des Elementarwürfels (wie bei Ni) die Richtung leichtester Magnetisierung ist. Ein Teil der Überlegungen und Ergebnisse ist auch in dem Buch von Becker und Döring über Ferromagnetismus (dies. Zbl. 21, 365) enthalten. *J. Meixner* (Berlin).

### **Optik:**

**Moon, Parry: A table of Fresnel reflection.** J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 19, 1—33 (1940).

**Escalagon, Félix: Sur la possibilité d'observation d'interférences lumineuses à partir de deux sources différentes.** J. Phys. Radium, VII. s. 10, 391—398 (1939).

Verf. weist darauf hin, daß rein theoretisch gesehen auch die sogenannte inkohärente Strahlung zweier unabhängiger Lichtquellen, spektral zerlegt, beobachtbare Interferenzstreifen zu erzeugen vermag, wenn es gelingt, zwei genügend monochromatische Anteile derselben zur Überlagerung zu bringen. Rechnungen über das Auftreten solcher Interferenzen führen zu der von vornherein einleuchtenden Bedingung, daß der durch den Monochromator hervorgerufene größte Gangunterschied groß sein muß gegen Länge und Abstand der primären Wellenzüge. Oder, anders ausgedrückt, daß die der spektralen Unschärfe des Monochromators entsprechende zeitliche Ausdehnung  $\Delta t = 1/\Delta \nu$  der monochromatischen Wellenanteile groß sein muß gegen die primäre Emissionsdauer der untersuchten Strahlung. Diese Bedingung kann freilich mit den heute erreichten Werten für das spektrale Auflösungsvermögen optischer Apparate nicht verwirklicht werden. Eine Reihe interessanter Betrachtungen über die Wirkungsweise der Spektralapparate als Fourieranalysatoren beschließt die Arbeit.

*Fues.*

**Ignatovskij, W. S.: Zur Beugung an einem Spalt, resp. Streifen.** I. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 375—378 (1939).

Im Anschluß an seine Arbeiten: „Zur Theorie der Gitter“ (dies. Zbl. 20, 83; 22, 94) behandelt der Verf. unter Benutzung seiner früher erhaltenen Formeln (Integralgleichungen) die Beugung an einem Spalt für den Fall (I), daß die elektrische Kraft der senkrecht auf die Spaltebene auftreffenden Lichtwelle der Spaltrichtung parallel liegt, sowie die



**Beugung an einem undurchsichtigen Streifen (gleicher Breite und gleicher Richtung) für den Fall (II), daß die magnetische Kraft der einfallenden ebenen Welle der Richtung des Streifens parallel liegt.** Der Verf. zeigt: Setzt man beim Spalt im Fall I die elektrische Kraft gleich  $u(x, y)$  und bei dem Streifen im Fall II die magnetische Kraft gleich  $u(x, y)$  und bildet hier  $1 - c u(0, y) = Z_0(y)$ , während man beim Spalt im Fall I die Größe  $u(0, y)$  durch  $N_0(y)$  bezeichnet, so gelten für  $N_0(y)$  und für  $Z_0(y)$  identische Integralgleichungen. Hier bedeutet  $x = 0$  die Spalt- bzw. Streifenebene, während die Spalt- bzw. Streifenrichtung mit der  $z$ -Achse zusammenfallend angenommen wurde;  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit. Die magnetische Kraft der einfallenden Welle ist in der Spalt- bzw. Streifenebene gleich  $\frac{1}{c}$  angenommen. Die erhaltenen Formeln werden weiter umgeformt. Der Verf. weist besonders darauf hin, daß die Kerne der zum Schluß erhaltenen Integralgleichungen zwar stetig, nicht aber in bezug auf ihre Argumente symmetrisch sind. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

**Ignatovskij, W. S.: Zur Beugung an einem Spalt, resp. Streifen. II.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 665—667 (1939).

Entsprechend den Untersuchungen im ersten Teil seiner Arbeit (vgl. vorsteh. Ref.) behandelt der Verf. in dem vorliegenden zweiten Teil die Theorie der Beugung an einem undurchsichtigen Streifen für den Fall, daß die elektrische Feldstärke des einfallenden Lichtes parallel zur Streifenrichtung schwingt, sowie die Beugung an einem Spalt für den Fall, daß die elektrische Kraft senkrecht zur Spalttrichtung schwingt. Er zeigt, daß sich für beide Probleme für die Beugung die gleiche Integralgleichung ergibt, wenn man sie für den Streifen auf die elektrische, für den Spalt auf die magnetische Kraft bezieht, und weiter — wie im ersten Teil der Arbeit — bei dem Spalt nicht die magnetische Kraft (in der Spaltebene an der Stelle des Spaltes) selbst, sondern den Wert 1 vermindert um das  $c$ -fache jener Kraft benutzt, wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Anschließend diskutiert er die Kerne der Integralgleichung, die er noch zweckentsprechend umformt. *Picht* (Potsdam).

### Relativitätstheorie:

**Chou, P. Y.: On the method of finding isotropic static solutions of Einstein's field equations of gravitation.** Amer. J. Math. 62, 43—48 (1940).

The author gives a method to find the isotropic static solutions

$$ds^2 = U^2 dt^2 - e^{-2\sigma} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

of Einstein's field equations. This method is worked out for  $n = 2$ . It is proved that Kasner's solution and the field of the semi-infinite plane are the only two-dimensional solutions. *J. Haantjes* (Amsterdam).

## **Atomphysik.**

### Statistik und kinetische Theorie der Materie:

**Frenkel, J.: A general theory of heterophase fluctuations and pre-transition phenomena.** J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 315—324 (1939).

Entwicklung der Idee, daß dem makroskopischen Übergang einer Substanz von einer Phase  $A$  in eine Phase  $B$  die Bildung kleiner Kerne der Phase  $B$  in der Phase  $A$  vorhergeht, die örtlichen und vorübergehenden Phasenübergängen entspricht; man kann sie als heterogene Schwankungen (im Gegensatz zu den gewöhnlichen Dichteschwankungen in molekularen Systemen oder homogenen Schwankungen) bezeichnen. Die Verteilung dieser Kerne ihrer Größe nach in Abhängigkeit von den äußeren Bedingungen bestimmt sich aus der Oberflächenspannung zwischen den  $B$ -Kernen und der Phase  $A$  und aus den thermodynamischen Potentialen der Phasen  $A$  und  $B$  und läßt sich mit Hilfe thermodynamischer und statistischer Überlegungen berechnen. Die Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Erscheinungen in Kristallen vor dem Schmelzen führt zu einer quantitativen Erklärung der anomalen Zunahme der spezifischen Wärme, des thermischen Ausdehnungskoeffizienten und der elektrischen Leitfähigkeit (letzteres bei Ionenkristallen) in der unmittelbaren Nähe des Schmelzpunktes; die Oberflächen-

spannung zwischen Kristall und Schmelze (bisher nicht direkt gemessen) muß in der Größenordnung  $1 \text{ dyn cm}^{-1}$  angenommen werden. Unterkühlte Flüssigkeiten, Phasenübergänge höherer Ordnung und die Umwandlung am Curiepunkt bei ferromagnetischen Substanzen werden vom selben Gesichtspunkt aus diskutiert. *J. Meixner* (Berlin).

**Frenkel, J.:** A general theory of heterophase fluctuations and of pretransient phenomena. *Ž. eksper. teoret. Fiz.* **9**, 952—962 (1939) [Russisch].

**Stepanov, P.:** Statistical-mechanical interpretation of a particular case of 2nd order phase transitions. *Ž. eksper. teoret. Fiz.* **9**, 1352—1378 (1939) [Russisch].

### **Kristallbau und fester Körper:**

**Akhieser, A.:** On the absorption of sound in solids. *J. Physics Acad. Sci. USSR* **1**, 277—287 (1939).

**Akhieser, A.:** On the absorption of sound in metals. *J. Physics Acad. Sci. USSR* **1**, 289—298 (1939).

In der ersten Arbeit wird die Schallabsorption in nichtmetallischen festen Körpern untersucht. Ausgegangen wird von der Zerlegung der thermischen Bewegung der Atome des Kristalls in harmonische Schallwellen. Zwischen diesen finden bei Vorhandensein von Gliedern dritter Ordnung der Dehnungen in der elastischen Energie Übergänge statt; sie werden für den Fall untersucht, daß gleichzeitig ein Schallfeld (Wellenlänge  $\gg$  freie Weglänge der Schallquanten) und ein Temperaturgradient vorhanden sind. Aus der Verteilungsfunktion der Schallquanten wird die Entropie und daraus die Energiedissipation berechnet. Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie werden mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips um ein Glied erweitert, das der Energiedissipation Rechnung trägt; aus ihnen läßt sich dann die Dämpfung (Absorption) der Schallwellen berechnen. Sie ist für hohe Temperaturen temperaturunabhängig, für tiefe Temperaturen proportional zu  $1/T$ . In beiden Fällen ist der Absorptionskoeffizient proportional zum Quadrat der Schallfrequenz. Schließlich wird noch der Einfluß der thermischen Leitfähigkeit auf die Schallabsorption genauer untersucht. — In der zweiten Arbeit werden dieselben Überlegungen für Metalle durchgeführt. Sie werden dadurch kompliziert, daß die Wechselwirkung zwischen Leitungselektronen und Wärmeschwingungen des Gitters zu berücksichtigen ist, die die Verteilungsfunktion der Schallquanten wesentlich beeinflußt. So ergibt sich Proportionalität des Schallabsorptionskoeffizienten mit  $T$  bei hohen und mit  $1/T^5$  bei tiefen Temperaturen. *J. Meixner*.

**Lewschin, W. L.:** The possibility of interpreting phenomena of polarized luminescence using linear oscillator model. VII. *J. Physics Acad. Sci. USSR* **1**, 265—275 (1939).

Mit dem Modell des einfachen linearen Oszillators wird die Erscheinung der polarisierten Lumineszenz von flüssigen und festen Lösungen untersucht. Berücksichtigt man die Richtungsänderung der Dipolachse im angeregten Zustand und die Nutation des Dipols infolge von Stößen mit Nachbarmolekülen, so läßt sich die Polarisation als Funktion der Temperatur, der Wellenlänge des anregenden Lichts, der Reibung im Lösungsmittel bestimmen. *J. Meixner* (Berlin).

**Lin, Chia-Chiao:** On the dependence of interaction energy upon atomic arrangements in superlattices of binary alloys. *Chin. J. Phys.* **3**, 182—197 (1939).

Die statistische Theorie der Überstrukturen in binären Legierungen wird verallgemeinert, indem eine Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie  $(V_{AA} + V_{BB})/2 - V_{AB}$  vom Grad der Ordnung und von der Zusammensetzung der Legierung angenommen wird. Diese Abhängigkeit wird als lineare Funktion der Konzentration und des Ordnungsgrades bzw. als lineare Funktion der Anzahlen der Paare von Nachbarn  $AA$ ,  $AB$ ,  $BB$  angenommen. Das Maximum der kritischen Temperatur als Funktion der Zusammensetzung liegt dann im allgemeinen nicht mehr, wie bei der einfachen Theorie, bei gleichen Konzentrationen von  $A$ - und  $B$ -Atomen. Die Anomalie der spezifischen Wärme bei der kritischen Temperatur wird in Analogie zur Theorie von Bragg und Williams [Proc. Roy. Soc. Lond. A **145**, 699 (1934)] angenähert berechnet. *J. Meixner*.



**Harasima, Akira:** On the change in electrical resistance of alkali metals on melting. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 679—686 (1939).

Unter Zugrundelegung der in einer früheren Arbeit aufgestellten Theorie des Schmelzens (dies. Zbl. 21, 184) wird die elektrische Widerstandsänderung der Alkalien beim Schmelzen berechnet. Der Widerstand wird im festen und flüssigen Zustand proportional zum mittleren Amplitudenquadrat der Schwingungen gesetzt;  $R_{\text{flüssig}}/R_{\text{fest}}$  ergibt sich allgemein zu 1,46. Ferner wird der Temperaturkoeffizient des Widerstandes  $\ln R/dT$  im flüssigen Zustand zu  $1,52/T_s$  ( $T_s$  = Schmelztemperatur) bestimmt. Ein Vergleich mit dem nach der Theorie der Kohäsion von Wigner und Seitz berechneten mittleren Amplitudenquadrat gibt in angenäherter Übereinstimmung mit dem Experiment  $V^{1/3}T_s = 1,37 \cdot 10^3$  ( $V$  = Molvolumen).  
J. Meixner (Berlin).

**Archibald, William J.:** The specific heat of a monatomic liquid. Phys. Rev., II. s. 56, 926—932 (1939).

Für ein Atom in einer einatomigen Flüssigkeit wird die Verteilungsfunktion unter der Annahme berechnet, daß das Atom in seiner Bewegung auf eine kugelförmige Zelle mit dem Potential  $W(r)$  beschränkt ist.  $W(r)$  wird durch Mittelung über die Lagen der Nachbaratome aus der Potentialfunktion  $\Phi(x)$  zwischen zwei Atomen berechnet, wie sie sich aus experimentellen Daten über den gasförmigen und kristallinen Zustand bei den beiden Ansätzen  $\Phi(x) = \lambda x^{-\sigma} - \mu x^{-6}$  bzw.  $\lambda' e^{-\rho x} - \mu' x^{-6}$  ergibt. Für beide Ansätze wird  $W(r)$  aus  $\Phi$  in der Form  $W(r) = W_0 + W_1 r^2 + W_2 r^4 + \dots$  berechnet. Die innere Energie und die spezifische Wärme der Flüssigkeit werden aus der Verteilungsfunktion unter Vernachlässigung der Glieder mit  $r^6$  bzw.  $r^8$  und höherer Glieder berechnet. Für flüssiges Argon ergibt sich gute Übereinstimmung mit dem Experiment zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt.  
J. Meixner (Berlin).

**Wiener, Norbert:** The use of statistical theory in the study of turbulence. (Cambridge, Mass., 12.—16. IX. 1938.) Proc. 5. internat. Congr. appl. Mech. 356—358 (1939).

Der Verf. stellt einen formalen Rahmen auf, in den sich nach seiner Meinung eine künftige statistische Theorie der Turbulenz einfügen lassen soll. Zunächst werden zu den Ergodentheoremen eigene Untersuchungen des Verf. angekündigt. Diese Theoreme sollen den in der statistischen Mechanik üblichen Übergang von zeitlichen Mittelwerten eines einzelnen dynamischen Systems zu Mittelwerten über eine große Schar solcher dynamischer Systeme mit verschiedenartigen Anfangsbedingungen rechtfertigen. Sodann will der Verf. ausgewählte Scharen solcher dynamischer Systeme konstruieren, deren Verhalten man im einzelnen beschreiben kann. Er sieht diese Möglichkeit, indem er von seinem Begriff des „Chaos“ ausgeht (vgl. auch den ausführlichen Aufsatz des Verf. über das homogene Chaos nach dem Referat von E. Hopf in dies. Zbl. 19, 354). Abschließend muß der Verf. allerdings selbst zugeben, daß die Erfordernisse der Chaos-Theorie weit über unsere heutigen Kenntnisse vom dynamischen Verhalten der Flüssigkeiten hinausgehen.  
W. Tollmien (Dresden).

### Elektronentheorie:

**Tamm, Ig.:** Radiation emitted by uniformly moving electrons. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 439—454 (1939).

Ein Elektron, das sich durch Materie mit einer Geschwindigkeit bewegt, die größer als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes ist, strahlt eine Kopfswelle aus. Diese Ausstrahlung wurde von Frank und Tamm [C. R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)] auf Grund der Maxwell'schen Elektrodynamik untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird diese Untersuchung erweitert, insbesondere werden die Bedingungen diskutiert, unter welchen die Theorie auf die sichtbare Strahlung der Elektronen angewandt werden kann, wenn diese beim Durchgang durch die Materie durch Stöße abgelenkt werden bzw. nach und nach Energie durch Ionisation und Bremsstrahlung verlieren.  
J. Meixner (Berlin).

**Fabrikant, W.:** Excitation of atoms in a gas discharge. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 224—228 (1939).

Die Untersuchung befaßt sich mit den Randbedingungen des durch  $k \Delta n = a$  beschriebenen Diffusionsproblems, wo  $n$  die Konzentration irgendwelcher Teilchen,  $a$  ihre sekundliche Erzeugung pro  $\text{cm}^3$  ist. Statt verschwindender Konzentration auf dem Rand wird verlangt, daß alle Teilchen, die im Abstand einer freien Weglänge

von der Wand auf diese hinfliegen, diese auch erreichen. — Bei einem linearen Diffusionsproblem zwischen zwei parallelen Wänden läßt sich die Lösung leicht angeben. Betrachtet man die Säule einer Entladung als einen unendlichen Zylinder vom Durchmesser  $a$ , so gilt auf der Wand  $-\frac{1}{3}\lambda\bar{c}\frac{dn_a}{dr} + \frac{1}{3}\alpha_a n q_e \lambda = \frac{n_a \bar{c}}{4} - \frac{\lambda \bar{c}}{6} \frac{dn_a}{dr}$  ( $k = \lambda v$ ,  $v$  mittlere Geschwindigkeit der Teilchen,  $b$  Teilchenkonzentration auf der Wand,  $n_a$  Konzentration,  $\bar{c}$  Geschwindigkeit angeregter Atome oder Lichtquanten,  $q_e$  Elektronenkonzentration,  $n$  Atomkonzentration,  $\alpha_a$  Anregungszahl.) Das Glied  $\frac{1}{3}\alpha_a n q_e \lambda$  kann vernachlässigt werden. — Nach W. Fabrikant [C. R. Acad. Sci. URSS **19**, 385 (1938)] ist  $q_e = J_0(\mu r/a)$ ;  $\mu$  ist kleiner als die erste Wurzel der Besselfunktion, da die Elektronenkonzentration oft von Null abweicht, und wird aus einer Messung gewonnen. — Bei schwacher Auslöschung gehört zu dem Problem die Differentialgleichung [W. Fabrikant, Techn. Phys. URSS **2**, 11 (1935)]  $\bar{D}_a \frac{d}{dr} \left( r \frac{dn_a}{dr} \right) = -\alpha_a n r J_0 \left( \mu \frac{r}{a} \right)$ , die integriert wird.  $n_a(a)/n_a(0)$  bestimmt sich aus der Randbedingung  $n_a(a)/n_a(0) = \frac{p}{1+p}$ , wo  $p = \frac{2\lambda}{3a} \frac{\mu J_1(\mu)}{1 - J_0(\mu)}$ . Das Verhältnis der Konzentration auf der Wand zur Konzentration in der Achse ist nahezu  $\lambda/a$ . — Bei starker Auslöschung spielt die verbesserte Randbedingung nur für Punkte in der Nähe der Wand eine Rolle. Weizel (Bonn).

**Zaitzev, A. A.:** Temperature of electrons in electric field and calculation of Townsend's  $\alpha$ . C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 229—232 (1939).

Die Elektronentemperatur in einem elektrischen Feld wird unter Voraussetzung der Maxwellverteilung aus der Energiebilanz

$$evE = A_i + A_e + A_{ei} + A_c$$

berechnet. ( $e$  Elementarladung,  $E$  Feldstärke,  $A_i$ ,  $A_e$ ,  $A_{ei}$  und  $A_c$  die sekundlich von einem Elektron für Ionisierungen, Anregungen, elastische Stöße und Beschleunigungen der erzeugten Elektronen benötigten Energien.) — Berücksichtigt man nur ein Anregungspotential  $V_e$  und das Ionisierungspotential  $V_i$ , so ist

$$A_i = peV_i \int_{c_i}^{\infty} B_i \varphi(c) dc; \quad A_e = peV_e \int_{c_e}^{\infty} B_e \varphi(c) dc; \quad A_c = peV_0 \int_{c_i}^{\infty} \frac{c}{\lambda_0} B_i \varphi(c) dc,$$

wenn  $B_i$  und  $B_e$  die Ionisierungs- und Anregungswahrscheinlichkeiten

$$B_i = d \frac{c^2 - c_i^2}{c_i^2}; \quad B_e = b \frac{c^2 - c_e^2}{c_e^2}$$

in Abhängigkeit von der Elektronengeschwindigkeit  $c$  sind. ( $p$  Druck,  $V_0$  Elektronentemperatur in Volt,  $c_i$  und  $c_e$  zur Ionisation bzw. Anregung ausreichende Elektronengeschwindigkeiten,  $\lambda_0$  mittlere Weglänge der Elektronen,  $\varphi$  Maxwellsche Funktion.) Für  $A_{ei}$  gilt

$$A_{ei} = 2,66 \frac{m}{M} \left( 1 - \frac{V_e}{V_0} \right) \bar{\varepsilon} \frac{\omega}{\lambda}.$$

( $M$  Atommasse,  $V_a$  Gastemperatur in Volt,  $\bar{\varepsilon}$  mittlere Elektronenenergie.) Drückt man  $v$  durch die Feldstärke aus, so gelangt man zu einer Formel, die  $V_0$  und damit die Elektronentemperatur  $T_e$  mit  $E/p$  verknüpft. — Die Formel ergibt wenig Unterschied gegen die Berechnung von Mierdel, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern **17**, 71 (1938) und ist in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Zahl  $\alpha$  der pro cm erzeugten Trägerpaare ergibt sich größer als bei Experimenten. Weizel (Bonn).

**Fischer, E., und F. C. Frank:** Dielektrische Relaxation von Molekülen mit frei drehbaren Dipolgruppen. Physik. Z. **40**, 345—352 (1939).

### Nicht-relativistische Quantentheorie:

**Matossi, F.:** Bemerkungen zur Analogie der Schrödingerschen Differentialgleichung mit einer Wellengleichung. Physik. Z. **41**, 47—52 (1940).



**Inglis, D. R., and E. Teller: Ionic depression of series limits in one-electron spectra.** *Astrophys. J.* **90**, 439—448 (1939).

Bei hohen Ionendichten hören die Spektralserien der Alkaliatome bei einer bestimmten Quantenzahl  $n$  auf. Dies kann auf einer Verbreiterung der Linien infolge Starkeffektes, herrührend von den Elektronen und Ionen, beruhen und auf einer Stoßverbreiterung. Die für wasserstoffähnliche Spektren durchgeführte Rechnung (frühere einfachere Rechnungen von Sugita, dies. Zbl. **9**, 420, und von Pannekoek ergänzend) zeigt, daß der Starkeffekt ausschlaggebend ist; es ergibt sich eine bestimmte Abhängigkeit des  $n$  von der Ionendichte und eine geringfügige Abhängigkeit von der Temperatur.

*Hund (Leipzig).*

**Feynman, R. P.: Forces in molecules.** *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 340—343 (1939).

Es wird gezeigt, daß für einen stationären Zustand eines beliebigen atomaren Systems der Gradient der Energie gleich dem wellenmechanischen Mittelwert dieses Gradienten ist, daß man also Kräfte, die auf die atomaren Teilchen im Atom oder Molekül wirken, aus solchen Mittelwerten berechnen kann. (Das ist eine selbstverständliche Folge des Satzes von Ehrenfest; d. Ref.) Die Kraft auf einen (festgehalten gedachten) Atomkern ist genau die elektrostatische Kraft der Abstoßung durch die anderen Kerne und der Anziehung durch die Ladungswolke der Elektronen. Bemerkungen über den Zusammenhang mit der Theorie der homöopolaren Bindung.

*Bechert (Gießen).*

**Gerö, L., und R. Schmid: Über die Dissoziationschemata der zweiatomigen Hydride und Deuteride. II.** *Z. Physik* **115**, 47—54 (1940).

Ergänzung einer früheren Untersuchung (vgl. dies. Zbl. **20**, 274). *F. Hund.*

**Shaffer, Wave H., Harald H. Nielsen and L. H. Thomas: The rotation-vibration energies of tetrahedrally symmetric pentatomic molecules. II.** *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 1051—1059 (1939).

Die Anwendung einer früher gegebenen allgemeinen Untersuchung (vgl. dies. Zbl. **22**, 284) wird auf gewisse Ober- und Kombinationsfrequenzen der beiden dreifach entarteten Normalschwingungen ausgedehnt.

*F. Hund (Leipzig).*

**Möglich, F., K.-H. Riewe und R. Rompe: Über den Einfluß der Ionisation und Dissoziation auf die spezifische Wärme.** *Ann. Physik*, V. F. **35**, 735—760 (1939).

Berechnung der Zustandssumme eines teilweise dissoziierten oder teilweise ionisierten Gases; Berechnung der spezifischen Wärme pro Atom oder Molekül. Die spezifische Wärme besteht aus drei Teilen, von denen der Translationsanteil mit der Teilchenvermehrung wächst, der innere Anteil abnimmt und der Anteil der Dissoziation oder Ionisation ein ausgeprägtes Maximum beim Dissoziationsgrad oder Ionisationsgrad 0,577 hat. Dieses Maximum beträgt bei kleinen Drucken ( $10^{-4}$  Torr) das Mehrhundertfache des Translationsanteils, seine Höhe nimmt aber mit steigendem Druck rasch ab. Zu jeder Dissoziations- oder Ionisationsstufe gibt es ein solches Maximum. Die spezifische Wärme als Summe der drei Anteile ist demnach stark druckabhängig. In der Arbeit wird die Dissoziation von  $H_2$  und Ionisation von  $H$  sowie die Ionisation von  $Hg$  behandelt (die ersten vier Ionisationsstufen). Das Elektronengas eines Halbleiters zeigt theoretisch ebenfalls ein Maximum der spezifischen Wärme; es beträgt (pro Elektron gerechnet) etwa 30 k/2.

*Bechert (Gießen).*

**Weinmann, Edgar: Einfluß der Strahlung bei der Rutherfordstreuformel.** Tübingen: Diss. 1939. 81 S. u. 5 Fig.

Die Arbeit behandelt die Streuung von Elektronen im Coulombfeld eines Atomkerns unter Berücksichtigung der dabei auftretenden elektromagnetischen Strahlung. Die in der Quantentheorie übliche störungstheoretische Behandlung der Ausstrahlung (Mott, Sommerfeld, Scherzer, Sauter, Bethe-Heitler), die die Aussendung nur eines Lichtquants beim Durchgang des Elektrons durch das Atomfeld in Betracht zieht, führt für sehr kleine Frequenzen des ausgesandten Lichts zur sogenannten Ultrarotkatastrophe: der Wirkungsquerschnitt des Atomfeldes gegenüber Elektronen ergibt sich für Ausstrahlung eines energiearmen Photons als unendlich groß. Die Schwierigkeit wird beseitigt durch Berücksichtigung von Strahlungsprozessen, bei

denen mehrere Photonen gleichzeitig ausgesandt werden (Bloch und Nordsieck). Die allgemeine sich ergebende Formel für die Elektronenstreuung liefert, nach Potenzen der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten entwickelt, in nullter Näherung die Rutherford'sche elastische (d. h. strahlungslose Streuung), in erster Näherung die unter Mitberücksichtigung einquantiger Strahlungsprozesse (vgl. oben) berechnete Streuung. Dies bedeutet Entwicklung nach  $1/h$ , woraus ersichtlich wird, daß sie im Grenzfall langwelliger Strahlung ( $h \rightarrow 0$ ) nicht zulässig sein kann. *Maue* (München).

**Ginsburg, V. L.:** On the asymmetry of the effective cross-section for collisions of the second kind. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 653—657 (1939).

Es wird auseinandergesetzt, daß der Wirkungsquerschnitt für Stöße zweiter Art (Übertragung der Anregungsenergie eines etwa durch Lichteinstrahlung angeregten Atoms auf das stoßende Teilchen) von der gegenseitigen Orientierung der Impulsänderung des stoßenden Teilchens und des elektrischen Vektors des anregenden Lichts abhängt, also im allgemeinen asymmetrisch ist. *J. Meixner* (Berlin).

**Bates, D. R.:** The quantal theory of continuous absorption of radiation by various atoms in their ground states. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 100, 25—29 (1939).

Das kontinuierliche Absorptionsspektrum einer Reihe von leichteren Elementen wird berechnet, die vor allem großes astrophysikalisches Interesse haben. Für die diskreten Ausgangszustände werden Hartree-Eigenfunktionen benutzt, für das Kontinuum eigens berechnete Wellenfunktionen; die Durchrechnung beim Sauerstoff zeigt jedoch, daß man für das Kontinuum ohne merklichen Fehler einfach die Eigenfunktionen des Wasserstoffkontinuums nehmen kann. Der Vergleich mit früher viel benutzten gröberen Modellen (analytische Approximationen mit Einführung zweckmäßiger „Abschirmungszahlen“) zeigt, daß diese zwar die Größenordnung des Absorptionskoeffizienten richtig gegeben hatten, jedoch eine zum Teil ganz fehlgehende Frequenzabhängigkeit. *H. Jensen* (Hamburg).

**Henvey, L. G.:** The Doppler effect in resonance lines. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 50—54 (1940).

**Yamanouchi, Takahiko, and Masao Kotani:** Photo-ionization and recombination of oxygen atom. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 60—76 (1940).

**Vinti, John P.:** Isotope shift in magnesium. Phys. Rev., II. s. 56, 1120—1132 (1939).

Es wird untersucht, ob die Feinstruktur einiger Spektrallinien des Mg als Isotopenverschiebung infolge Mitbewegung der Kerne (der Massenzahlen 24, 25, 26) gedeutet werden kann, also ohne Annahme eines Kerndralls oder nicht-Coulombschen Kernfeldes. Eine Berechnung der Verschiebungen auf dieser Grundlage gibt qualitative Übereinstimmung mit der Beobachtung. Eine Deutung der beobachteten Werte gibt plausible Werte der so bestimmten Parameter. *F. Hund* (Leipzig).

**Fröhlich, H.:** Dielectric breakdown in ionic crystals. Phys. Rev., II. s. 56, 349—352 (1939).

Verf. vergleicht eine eigene früher entwickelte Theorie des elektrischen Durchschlags durch Ionenkristalle mit einer Theorie von Seeger und Teller über denselben Gegenstand. Die Abweichungen in den Endformeln beider Theorien werden in erster Linie darauf zurückgeführt, daß Seeger und Teller die Richtungsänderung unberücksichtigt lassen, die die Bewegung eines Elektrons beim Energieaustausch mit dem Ionengitter erfährt. *Maue*.

**Seeger, R. J., and E. Teller:** Remarks on the dielectric breakdown, Phys. Rev., II. s. 56, 352—354 (1939).

Die Verf. nehmen Stellung zu einer Kritik Fröhlichs (vgl. vorstehendes Ref.) an einer früheren Arbeit der Verf. über den elektrischen Durchschlag. Sie legen den Standpunkt ihrer Theorie gegenüber dem einer früher von Fröhlich gegebenen Theorie über denselben Gegenstand fest und stellen Betrachtungen darüber an, wie sich eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden Theorien treffen ließe. *Maue* (München).

**Suhrmann, R., und W. Berndt:** Über die irreversiblen Änderungen des elektrischen Widerstandes und des Lichtreflexionsvermögens von bei tiefen Temperaturen konden-



sierten Antimon-, Arsen-, Tellur, Eisen- und Silberschichten. Z. Physik 115, 17—46 (1940).

Schön, Michael: Zur Physik der Strahlungsumwandlung durch Leuchtstoffe. (14. Dtsch. Physik.- u. Math.-Tag, Baden-Baden, Sitzg. v. 11.—16. IX. 1938.) Z. techn. Physik 19, 361—364 u. Physik. Z. 39, 936—940 (1938).

Zur Deutung des Leuchtvorgangs bei Kristallphosphoren wird die Vorstellung der Energiebänder für die Elektronen in Kristallen herangezogen unter Berücksichtigung der Störstellen im Gitterbau. J. Meixner (Berlin).

Parodi, Maurice: Sur un phénomène de propagation d'ondes. J. Phys. Radium, VII. s. 10, 399—402 (1939).

Magnetnadeln der Länge  $2l$  seien in einer geradlinigen Kette angeordnet in gleichen Abständen  $d$ , wobei  $d \gg 2l$ . Die Nadeln sollen alle in der gleichen Ebene drehbar sein, jede um ihren Mittelpunkt. Am einen Ende der Kette wird der dort befindlichen Nadel eine periodische Bewegung erteilt. Gefragt ist nach der Bewegung der Nadeln, wenn nur die Wechselwirkung von Nachbarn berücksichtigt wird und die Ausschläge klein sind. Die Schwingungsfrequenzen der Nadeln liegen zwischen zwei Grenzfrequenzen  $\nu_0, \nu_1$ ; das gilt auch noch, wenn ein äußeres magnetisches Feld auf die Nadeln wirkt, nur verschieben sich dann  $\nu_0, \nu_1$ . Anwendung auf den Ferromagnetismus: das Frequenzband  $\nu_0$  bis  $\nu_1$  wird als sehr schmal angenommen und die Frequenzen durch eine einzige allen Nadeln gemeinsame Frequenz ersetzt; Berechnung der spezifischen Wärme der spontanen Magnetisierung, der Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit der spontanen Magnetisierung, Anwendung auf den magnetokalorischen Effekt. Qualitative Züge der Beobachtungen lassen sich mit der geschilderten einfachen Theorie verstehen. B. Shert (Gießen).

Davydov, B., and I. Pomeranchuk: On the influence of the magnetic field on the electric conductivity of bismuth single crystals at low temperatures. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 1294—1308 (1939) [Russisch].

Muto, Toshinosuke: On the ferromagnetism of impurity-semiconductors. Sci. Pap. Inst. phys. chem. Res., Tokyo 36, 271—280 (1939).

Gewisse Ferromagnetika, z. B. Magnetit, zeigen eine Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung, die von der normalen Ferromagnetika Fe, Co, Ni abweicht. Bei ihnen hat die Sättigungsmagnetisierung ihren größten Wert nicht am absoluten Nullpunkt, sondern bei einer höheren Temperatur. Da diese Stoffe eine verhältnismäßig geringe elektrische Leitfähigkeit besitzen, liegt es nahe, sie als Halbleiter anzusehen und das Modell des elektronischen Halbleiters zur Erklärung ihrer ferromagnetischen Eigenschaften heranzuziehen. Für das Modell des Eigenhalbleiters wurden solche Betrachtungen von Miyahara durchgeführt. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Fall des Störstellenhalbleiters. In beiden Fällen gelingt es, das qualitative ferromagnetische Verhalten der betrachteten Stoffe zu verstehen. Maue (München).

Rudnitsky, V.: On the Hall effect in ferromagnetic bodies. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 247—250 (1939).

Der Halleffekt in ferromagnetischen Substanzen, der nicht proportional zur magnetischen Induktion, sondern zur Magnetisierung ist, wird durch die Wirkung des Magnetfeldes des elektrischen Stromes auf die Spinnmomente der Elektronen, die durch das äußere Magnetfeld ausgerichtet sind, zu erklären versucht. J. Meixner (Berlin).

Bequerel, Jean, et W. Opechowski: Pouvoir rotatoire paramagnétique et aimantation du fluosilicate de nickel hexahydraté, dans la direction de l'axe optique. Le champ cristallin. Physica, Haag 6, 1039—1056 (1939).

In  $\text{NiSiF}_6 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$  ist nach strukturtheoretischen Arbeiten das  $\text{Ni}^{++}$ -Ion oktaedrisch von  $\text{H}_2\text{O}$ -Molekülen und rhomboedrisch von  $\text{SiF}_6$ -Gruppen umgeben. Die Verff. nehmen daher an, daß das  $\text{Ni}^{++}$ -Ion in einem Kristallfeld von oktaedrischer Symmetrie liegt, dem sich ein schwaches trigonales Störungfeld überlagert; die dreizählige Achse beider fällt mit der optischen Achse des Kristalls zusammen. Unter dieser Voraussetzung und mit der für die Ionen der Eisengruppe vielfach bewährten Annahme, daß die  $LS$ -Kopplung durch das Kristallfeld gelöst sei, ergeben sich als tiefste Zustände des Ions ein zweifach entarteter, in einem parallel zur optischen Achse stehenden Magnet-

feld aufspaltender Grundterm und, im Abstand  $\delta$  darüber, ein einfacher, magnetisch inaktiver Term. — Mit diesen Annahmen lassen sich die Beobachtungen von J. Becquerel und J. van den Handel [Physica 6, 1034 (1939)] zwanglos und mit befriedigender Genauigkeit deuten, wenn man annimmt, daß der  $^3F$ -Grundterm des freien Ions im Kristallfeld eine totale Aufspaltung von  $19200 \text{ cm}^{-1}$  erfährt, wogegen die oben erwähnten zwei niedrigsten Zustände um  $\delta = 0,301 \text{ cm}^{-1}$  entfernt liegen. Das magnetische Moment des Grundzustandes in Richtung der optischen Achse ergibt sich zu  $\mu = 2,25 \mu_B$ , während der Grenzwert ( $T \rightarrow 0$ ) des aus dem Verlauf der Verdetischen Konstanten bei höheren Temperaturen ermittelten „effektiven“ Moments 3,185 Bohrsche Magnetonen beträgt. Fues.

Jordan, P.: Physikalische Untersuchungen an Eiweißmolekülen. Naturwiss. 28, 69—77 (1940).

### Relativistische Quantentheorie:

Iwatsuki, Toranosuke, Yositaka Mimura and Takasi Sibata: The equation of motion of a particle in wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 8, 187—192 (1938).

By means of the spinor  $\bar{\Psi}$  and the hermitean tensor  $\omega$  the vector  $u^i = \bar{\psi} \omega \gamma^i \psi$  is constructed ( $\gamma^i \gamma^j = g^{ij}$ ). It is shown that the field  $u^i$  is a tangent vector field of geodesic lines in the space unifying gravitation and electromagnetism, when  $\bar{\Psi}$  satisfies the fundamental equation:  $\nabla_i \bar{\Psi} = \bar{\Sigma}_i \bar{\Psi}$ . Therefore  $u^i$  is identified with the momentum density vector of a particle. J. Haantjes (Amsterdam).

Takeno, Hyôitirô: Cosmology in terms of wave geometry. V. Universe with Born-type electromagnetism. J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 195—216 (1939).

(I, II, III, IV this Zbl. 20, 191; 21, 86.) The symmetrical quantities  $A_{AB}$  are uniquely determined by the equations  $A \gamma_i = \bar{\gamma}_i \bar{A}$ , where  $\gamma_i \gamma_j = g_{ij}$ . In order that the vector  $u^i = \bar{\psi} A \gamma^i \psi$  may satisfy the equation

$$u^j \nabla_j u^i = 2(M \overset{1}{F}_j{}^i + N \overset{2}{F}_j{}^i) u^j + Q u^i,$$

[comp. Iwatsuki, Toranosuke, Mimura and Sibata, J. Sci. Hiroshima Univ. A 8, 187 (1938); see the prec. review] the equation for  $\psi$  must be of the form  $\nabla_i \psi = \Sigma_i \psi$ . The author finds five different spherically symmetric line elements, which satisfy the conditions of integrability. J. Haantjes (Amsterdam).

Morrison, P.: Energy fluctuations in the electromagnetic field. Phys. Rev., II. s. 56, 937—940 (1939).

Dans la théorie des quanta, la fluctuation de l'énergie est définie par l'espérance mathématique de l'opérateur  $\Delta = (E - \bar{E})^2$  où  $E$  est l'opérateur de l'énergie et  $\bar{E}$  l'espérance de cet opérateur. L'auteur calcule l'espérance mathématique  $\bar{\Delta}$  pour un état du champ où le nombre des quanta  $N_k$  dans chaque onde plane désignée par l'indice  $k$  est connu. Si  $E$  signifie l'énergie continue dans un volume  $V$ , la fluctuation se décompose en trois termes  $\Delta_s + \Delta_n + \Delta_0$ .  $\Delta_n$  est un terme proportionnel à la surface du volume  $V$ . Il est donc négligeable par rapport à  $\Delta_s$  (qui est proportionnel à  $V$ ) pour autant que les longueurs d'onde sont petites par rapport aux dimensions du volume.  $\Delta_s$  a la forme bien connue du terme correspondant dans un gaz composé de  $N_k$  particules ayant l'énergie  $h\nu_k$  et obéissant à la statistique de Bose.  $\Delta_0$  par contre est „une fluctuation de zéro-point énergie“ et diverge d'une manière analogue à la zéro-point énergie d'un champ quantifié. Pour obtenir une expression finie, l'auteur redéfinit  $E$  (et donc  $\bar{E}$  et  $\bar{E}^2$ ) par sa valeur moyenne au cours d'un intervalle temporel  $\tau$ .  $\Delta_0$  est alors proportionnel à la surface de  $V$  et inversement proportionnel à  $\tau^4$ .

Stueckelberg (Genf).

Galperin, F.: Divergency in the higher approximations in quantum electrodynamics. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 1399—1402 (1939) [Russisch].

Ryzhanov, S.: Remarks to the theory of vacuum polarization. Ž. eksper. teoret. Fiz. 9, 1403—1404 (1939) [Russisch].



**Wataghin, Gleb:** Sugli sciami a esplosione. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* **10**, 1148—1149 (1939).

L'auteur considère des explosions du type suivant: Deux particules primaires se recontrent et s'anéantissent en produisant  $n$  quanta secondaires. Introduisant des termes dans l'Hamiltonien, qui donnent lieu à de tels événements (en première approximation déjà), l'auteur démontre que l'explosion suivante se produit avec la plus grande probabilité: Tous les quanta produits ont la même énergie  $h\nu_0$  ( $\nu_0$  étant la fréquence correspondante à une certaine longueur fondamentale de la théorie). Pour cette raison, le nombre  $n$  des quanta est proportionnel à l'énergie des deux particules primaires.

*Stueckelberg* (Genève).

**Fierz, Markus:** Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin. (*Physik. Inst., Eidgen. Techn. Hochschule, Zürich.*) *Helv. phys. Acta* **13**, 45—60 (1940).

Dans un article précédant [*Helv. physica Acta* **12**, 3 (1939)], l'auteur a discuté la théorie du champ auquel la théorie des quanta fait correspondre des particules possédant un spin  $f > 1$ . Si les quanta n'ont pas de masse de repos, une discussion spéciale s'impose, que l'auteur nous donne dans cet article. Pour  $f = 1$ , les conclusions sont identiques à celles de la théorie du photon. Ainsi, on peut définir un „groupe des transformations de jauge“ qui laisse invariantes les grandeurs physiques. La quantification de la théorie montre que le moment angulaire  $j$  d'un seul quantum (mesuré en unité  $\hbar$ ) est toujours supérieur ou égal au moment angulaire du spin  $f$ . Ce théorème est la généralisation du phénomène bien connu, que l'orientation du spin d'un photon associé à une onde plane est toujours parallèle ou antiparallèle à la direction de propagation. La démonstration se fait pour des spins entiers et demi-entiers en utilisant respectivement la quantification de Bose-Einstein et celle de Fermi-Dirac.

*Stueckelberg* (Genf).

**Petiau, Gérard:** Sur la représentation de l'équation d'ondes et l'évolution des grandeurs électromagnétiques dans la théorie du photon. *J. Phys. Radium*, VII. s. **10**, 413—419 (1939).

Suivant des idées de L. de Broglie, l'auteur montre qu'un système de 32 équations linéaires et du premier ordre (écrit sous une forme analogue aux équations de Dirac) est équivalent à la théorie de Maxwell. Il calcule ensuite la composante du spin d'un quantum associé à une onde plane et trouve comme résultat  $\pm 1$  et 0. (Comme l'auteur se base sur une masse de repos non nulle du photon, les équations résultantes doivent être comparées aux équations du champ nucléaire de Yukawa [champ des mésons] plutôt qu'au champ de Maxwell. En effet, les équations que l'auteur appelle „cas maxwellien“ sont les équations du champ d'un mésotron doué du spin 1 (théorie vectorielle du mésotron) tandis que les équations appelées „système non maxwellien“ correspondent à la théorie scalaire du mésotron [spin 0]. Le réf.) *Stueckelberg*.

**Petiau, Gérard:** Sur l'équation d'ondes d'un corpuscule à deux états de masse susceptible de représenter le proton-neutron. *C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 194—197 (1939).

Soit  $S = \sum \Gamma^i \partial / \partial x_i$  un opérateur différentiel.  $S$  est l'opérateur de Dirac, si l'on demande que  $S^2 - \square = 0$ . L'auteur discute des opérateurs plus généraux satisfaisant à  $(S^2 - \square)^2 = 0$ . Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux de ces opérateurs, ils sont aptes à décrire une particule possédant deux valeurs propres de la masse de repos. La particule possède un spin  $3/2$ . Les opérateurs  $\Gamma^i$  étant non hermitiques, l'introduction de l'action du champ électromagnétique sur la particule n'est pas possible. *Stueckelberg*.

**Fröhlich, H., W. Heitler and B. Kahn:** Deviation from the coulomb law for a proton. (*H. H. Wills Laborat., Univ., Bristol.*) *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 961—962 (1939).

An der älteren Arbeit der Verff. [*Proc. Roy. Soc.* **171**, 269 (1939)] hatte Lamb [*Phys. Rev.* **56**, 384 (1939)] kritisiert, daß nach ihr ein Proton in gewissem Abstand eine negative Ladung abstoßen kann, obwohl es doch höchstens eine Mesonenladung virtuell abgeben und dadurch ungeladen werden, aber nicht negativ aufgeladen werden

kann. Verff. zeigen, daß wegen der Möglichkeit, Mesonenpaare virtuell zu emittieren, negative Raumladungen auftreten können, die ihr Resultat erklären. Sie hoffen, daß derartige Resultate richtig seien, obwohl für andere, analoge Effekte ein divergentes Resultat aus der Theorie folgt. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

**Eddington, A. S., and H. M. Thaxton:** On the interaction potential in the scattering of protons by protons. *Physica*, Haag 7, 122—124 (1940).

**Heydenburg, N. P., L. R. Hafstad and M. A. Tuve:** The scattering of protons by protons. III. *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1078—1091 (1939).

**Plesset, Milton S., and Frederick W. Brown:** Scattering of slow neutrons by protons. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 25, 600—604 (1939).

Das Problem wird für ein Kastenpotential und das Yukawasche Potential streng durchgerechnet. Die Lösung wird verglichen mit dem Ergebnis der Methode von Kapur und Peierls [*Proc. Roy. Soc.* 166, 277 (1938)]. *C. F. v. Weizsäcker*.

**Drăganu, Mircea:** Über die Bildung schwerer Elektronen. Cluj: Diss. 1939. 31 S. [Rumänisch].

**Agno, Mario, Gilberto Bernardini, Bernardo Nestore Cacciapuoti, Bruno Ferretti e Giancarlo Wick:** Sulla instabilità del mesotrone. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 10, 1073—1081 (1939).

**Ferretti, Bruno:** Sulla desintegrazione spontanea del mesotrone. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 10, 1144—1148 (1939).

Si la masse du mésotron est considérée comme donnée et si l'on admet que les forces nucléaires résultant en deuxième approximation de la théorie de Yukawa, la grandeur des forces nucléaires et la vie moyenne d'un élément  $\beta$ -radioactif déterminent uniquement la vie moyenne d'un mésotron. L'auteur croit obtenir un meilleur accord avec les observations de la vie moyenne du mésotron en substituant au processus „mésotron  $\rightarrow$  électron + neutrino“ le processus „mésotron  $\rightarrow$  mésotron neutre (= neutretto) + électron + neutrino“. La radioactivité  $\beta$  devient alors un processus du troisième ordre. (Le choix particulier des coefficients de couplage entre les champs de mésotrons et les particules lourdes nous semble être en contradiction avec les hypothèses généralement admises. Le réf.) *Stueckelberg* (Genève).

**Cocconi, Giuseppe:** La nuova prova della instabilità del mesotrone. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 11, 58—65 (1940).

**Serber, Robert:** Beta-decay and mesotron lifetime. *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1065 (1939).

In einer Mesonentheorie der Kernkräfte mit vektorielltem Mesonenfeld ergeben sich Schwierigkeiten, wenn man die  $\beta$ -Umwandlung der Kerne durch einen Zerfall der Mesonen in Elektronen und Neutrinos erklären will. Deshalb wird hier die Auffassung vertreten, daß die  $\beta$ -Umwandlung darauf beruht, daß die schweren Kernteilchen direkt Elektronen abgeben. *F. Hund* (Leipzig).

**Jánossy, L.:** The exchange force between three heavy particles due to the meson exchange field. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35, 616—621 (1939).

Die Mesonentheorie liefert in höherer Näherung Kräfte, welche von den gleichzeitigen Koordinaten von drei (und mehr) Teilchen abhängen. Verf. berechnet sie anschließend an Kemmer [*Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 354 (1938)]. Sie werden mit den Zweierkräften vergleichbar für Teilchenabstände kleiner als die charakteristische Länge der Mesonentheorie. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

**Brown, Frederick W.:** The binding energy of  $H^3$ . *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1107—1110 (1939).

Die Konstanten des aus der Mesontheorie der Kernkräfte folgenden Potentialansatzes werden so bestimmt, daß sich die Streuung langsamer Neutronen an Protonen und die Bindungsenergien von  $H^2$  und  $H^3$  richtig ergeben. *F. Hund* (Leipzig).



**Heydenburg, N. P., and R. B. Roberts:** Deuteron-deuteron, proton-helium, and deuteron-helium scattering. *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 1092—1095 (1939).

Die Ergebnisse dieser Streuversuche lassen sich durch eine Abstoßungskraft von kurzer Reichweite zwischen zwei Deuteronen bzw. zwischen einem Deuteron und einem He-Kern deuten.

*J. Meixner* (Berlin).

**Collins, George B., Bernard Waldman and Eugene Guth:** Disintegration of beryllium by electrons. *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 876—880 (1939).

Ausführlichere Behandlung der von den Autoren in *Phys. Rev.* **55**, 412 (dies. Zbl. **22**, 191) bereits kurz angeführten Experimente.

*H. Jensen* (Hamburg).

**Frenkel, J.:** Electro-capillary theory of the splitting of heavy elements by slow neutrons. *J. Physics Acad. Sci. USSR* **1**, 125—136 (1939).

Die Uranspaltung durch Neutronen wird (unabhängig von den ebenso vorgehenden Arbeiten von Frisch und Meitner, Bohr und dem Ref.) durch die Konkurrenz zwischen elektrostatischer und Oberflächenenergie des Kerns erklärt. Die quantitative Bedingung für die Möglichkeit des Zerfalles wird aufgestellt. Die Schwingungsformen des Kerns unter dem Einfluß beider Energien werden untersucht. Drei Mechanismen des Spaltprozesses werden vorgeschlagen: klassische Anregung einer zerfallsfähigen Kernschwingung; Tunneleffekt derselben Schwingung; Verminderung der Oberflächenspannung durch die Erwärmung des Kerns beim Neutroneneinfang.

*v. Weizsäcker*.

**Gurevich, I.:** On the properties of the energy spectrum of heavy nuclei. *Ž. eksper. teoret. Fiz.* **9**, 1283—1293 (1939) [Russisch].

**Hahn, Otto, und Fritz Strassmann:** Verwendung der „Emanierfähigkeit“ von Uranverbindungen zur Gewinnung von Spaltprodukten des Urans; zwei kurzlebige Alkalimetalle. *Naturwiss.* **28**, 54—61 (1940).

**Peierls, R.:** Critical conditions in neutron multiplication. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **35**, 610—615 (1939).

Bei einem Kernumwandlungsprozeß, der durch Neutronen verursacht wird und der im Mittel mehr sekundäre Neutronen erzeugt als primäre verbraucht, kann es vorkommen, daß die Zahl der Neutronen in einem Körper explosionsartig wächst, um so eher, je größer der Körper ist. Unter vereinfachenden Annahmen wird ausgerechnet, wie groß ein kugelförmiger Körper sein muß, damit bei gegebenem Vermehrungsfaktor der Neutronen die Explosion eintritt.

*F. Hund* (Leipzig).

**Skobel'tzyn, D. V., and S. N. Vernov:** On the soft component of cosmic radiation in connexion with the problem of mesotron disintegration. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **26**, 33—36 (1940).

**Tamm, Ig., and S. Belenky:** On the soft component of cosmic rays at sea level. *J. Physics Acad. Sci. USSR* **1**, 177—198 (1939).

Es werden einfache analytische Ausdrücke für die Anzahl und Energieverteilung der durch Mesonen erzeugten Elektronen angegeben. Die Rechnungen von Bhabha [*Proc. Roy. Soc. London A* **164**, 257 (1938)] über dasselbe Problem werden kritisiert. Aus den Rechnungen wird gefolgert, daß die üblichen Annäherungen der Schauertheorie, nämlich die Vernachlässigung der Energieverluste durch Ionisation oberhalb der kritischen Energie  $E_c$  und der Paarbildung unterhalb  $E_c$ , beträchtliche Fehler hinsichtlich der Anzahl und Energieverteilung von Elektronen bedingen, deren Energie unterhalb  $E_c$  liegt.

*C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

## Astrophysik.

**Seonzo, Pasquale:** Considerazioni sulla risoluzione di un caso particolare del problema delle due altezze. *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. **13**, 5—18 (1940).

Für die (bekanntlich streng lösbare) Aufgabe, gleichzeitig Polhöhe und Zeit aus zwei gemessenen Höhen verschiedener Sterne zu bestimmen, wird nach einem Überblick über die zahlreichen für nautische Zwecke entwickelten Näherungslösungen ein graphisch oder rechnerisch durchführbares Lösungsverfahren entwickelt, dessen Prinzip der bekannten Standlinienmethode nach M. St. Hilaire völlig analog ist. Dabei läßt sich auch auf einfache Weise die von C. Wirtz schon 1902 diskutierte Möglichkeit verwirklichen, statt der beobachteten Höhen selbst nur ihre Differenz zu benutzen, wodurch die Kimmtiefe eliminiert wird, soweit sie nicht mit dem Azimut variiert. Ferner betrachtet der Verf. den Fall, daß mehr als zwei



Höhen beobachtet sind, und zeigt, daß die strenge Ausgleichung auf die Lösung des verallgemeinerten Grebe-Lemoineschen Problems hinausläuft. *Wempe (Jena).*

**Thüring, B.:** Über den logischen Gehalt jener Weltalltheorien, welche sich einer nicht-euklidischen Geometrie oder einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit bedienen. *Z. ges. Naturwiss.* 5, 246—255 (1939).

**Candler, W. E.:** Some theorems for a star with variable polytropic index. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 100, 14—24 (1939).

Vier Theoreme, die sich auf die Frage beziehen, inwieweit ein Stern  $S$  vom variablen Polytropenindex  $n$  ( $n_1 < n < n_2$ ) Eigenschaften besitzt, die zwischen denjenigen zweier Sterne  $S_1$  und  $S_2$  vom konstanten Polytropenindex  $n_1$  und  $n_2$  liegen. *Heckmann.*

**Wurm, Karl:** On the physical significance of the M-S differentiation. *Astrophys. J.* 91, 103—112 (1940).

Die relative Stärke der TiO- und ZrO-Banden in den Spektralklassen  $M$  und  $S$  wird auf Grund verschiedener atmosphärischer Bedingungen erklärt.  $S$ -Sterne haben eine niedrigere atmosphärische Dichte als  $M$ -Sterne der gleichen Temperatur. Für eine gegebene Temperatur  $T$  ist die obere Grenze der Gesamtdichte in den Atmosphären von  $S$ -Sternen gegeben durch

$$\nu = \varrho \frac{1}{\mu - 1} K_{\text{TiO}}(T),$$

wo  $K_{\text{TiO}}(T) = \nu_{\text{Ti}} \nu_{\text{O}} / \nu_{\text{TiO}}$  die Dissoziationskonstante des TiO-Moleküls bedeutet,  $\varrho$  das Häufigkeitsverhältnis von Wasserstoff und Sauerstoff und  $\mu$  das Häufigkeitsverhältnis von Titan und Zirkon. Die niedrigen Werte von  $\nu$  für  $S$ -Sterne deuten an, daß diese Überriesen sind. *Heckmann (Göttingen).*

**Kopal, Zdeněk:** Contribution to the effective stellar temperature scale. *Astrophys. J.* 90, 281—288 (1939).

**Wildt, Rupert:** Negative ions of hydrogen and the opacity of stellar atmospheres. *Astrophys. J.* 90, 611—620 (1939).

Verf. berichtet über die Resultate einer Berechnung des Beitrages zur Opazität von Sternatmosphären, den die negativen Wasserstoffionen geben. Zieht man sie in Betracht, so erhöht sich die Photosphärendicke beträchtlich in allen Spektraltypen, die  $F5$  folgen, und die Diskontinuität an der Balmerischen Grenze wird recht verkleinert. Diese kann man dann ohne die Voraussetzung darstellen, die Unsöld gemacht hat, daß das Verhältnis von Wasserstoff zu Metallen 50:1 sei. *Hubert Slouka (Prag).*

**Hoffleit, Dorrit:** The cyanogen discriminant between giant and dwarf stars. *Astrophys. J.* 90, 621—624 (1939).

Das bekannte Cyanogenkriterium zur Unterscheidung von Riesen und Zwergen wurde ursprünglich von Lindblad in Uppsala und Becker in Bergedorf und Potsdam in die Astrophysik eingeführt, wobei Lindblad die Bestimmung von absoluten Größen der untersuchten Sterne erzielte, während Beckers Untersuchungen nur zur Unterscheidung von Riesen und Zwergen führten. Verf. untersuchte für 128 G- und K-Sterne die entsprechenden Spektrogramme, die aber von kleiner Dispersion (400 Å per mm) waren. Die Resultate wurden mit denen von Becker und von Mrs. Gaposchkin verglichen, wobei sich zeigte, daß das Cyanogenkriterium eine sichere Unterscheidung von normalen Riesen und Zwergen ermöglicht, während es bei Supergiganten an Genauigkeit beträchtlich einbüßt. *Hubert Slouka (Prag).*

**Sanford, Roscoe F., and O. C. Wilson:** On the doublet ratio of interstellar H and K and the absolute magnitudes of Wolf-Rayet stars. *Astrophys. J.* 90, 235—243 (1939).

Verf. haben die totalen Absorptionen der interstellaren Ca II-Linien sowie von H und K bei 40 O- und B-Sternen mit schwacher H $\epsilon$  und in 18 Wolf-Rayet-Sternen gemessen. Für sehr schwache Linien wurde für das Verhältnis K/H der Wert 2 erhalten, für Linien größerer Intensität verringert sich dieses Verhältnis bis 1,56 für H = 0,4 Å, ohne weiter merkbar kleiner zu werden. 24 Sterne wurden benützt, um die totalen Absorptionen der interstellaren  $D_2$  und  $D_1$  des Na I zu bestimmen, und für die



Verhältnisse  $D_2/K$  und  $D_1/H$  werden die Werte 1,63 und 2,18 erhalten. Die Entfernungen von 18 Wolf-Rayet-Sternen wurden aus der graphischen Darstellung des Zusammenhanges von Entfernung und K-Linienintensität abgeleitet, die zur Ermittlung von mittleren visuellen absoluten Größen dieser Sterne dienten. Aus diesen absoluten Größen und entsprechenden Temperaturen wurden die Massen der Wolf-Rayet-Sterne als 30mal größer als die Sonnenmasse gefunden. *Hubert Slouka (Prag).*

Struve, Otto: The ultraviolet spectra of A and B stars. *Astrophys. J.* **90**, 699—726 (1939).

Swings, P., B. Edlén and J. Grandjean: New identifications of Fe III in the spectra of early B stars. *Astrophys. J.* **90**, 378—386 (1939).

Spitzer jr., Lyman: Spectra of M supergiant stars. *Astrophys. J.* **90**, 494—540 (1939).

Für einige M-Überriesen, insbesondere  $\alpha$  Orionis und  $\alpha$  Herculis, werden aus Spektren hoher Dispersion die Konturen von ausgewählten Fe- und Mn-Multipletts durch Breitenmessung im Kern der Linie (bei 0,9, 0,8 und 0,7 der maximalen Linientiefe) sowie die absoluten Intensitäten in der Linienmitte (aus Annahmen über den Verlauf des Kontinuums) bestimmt. Die wegen der endlichen Auflösung des Spektrographen korrigierten Konturen sind durch Dispersionskurven darstellbar, jedoch mit einer Dämpfungskonstanten, die mindestens das 500fache des klassischen Werts trägt. Diese große Linienbreite wird turbulenten Bewegungen zugeschrieben, deren mittlere Geschwindigkeit von der Größenordnung 10 km/sec formal einer Temperatur von 200000° entsprechen würde. Aus Fe-Linien verschiedenen Anregungspotentials und bekannter Oszillatorenstärke ergibt sich die Anregungstemperatur zu 2100°, während aus der (mit zunehmender Wellenlänge nur wenig abnehmenden) Absolutintensität eine „Linientemperatur“ von etwa 8000° folgt. Die in diesen Zahlen ausgedrückte starke Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht wird weiter bestätigt durch die Balmerlinien, deren große Intensität eine der Temperatur 17000° entsprechende Intensität von  $L\alpha$  erfordern würde. — In den M-Sternen mit den ausgedehntesten Atmosphären zeigen alle vom Grundzustand ausgehenden Linien eine deutliche Asymmetrie, die sich durch eine der normalen breiten Linie überlagerte scharfe Absorption mit einer Violettverschiebung gemäß Geschwindigkeiten von 4—40 km/sec erklären läßt. Als Modell einer kinematischen Deutung untersucht Verf. die Möglichkeit einer dünnen expandierenden Schicht, in der neutrale Atome durch Strahlungsdruck aufsteigen und nach ihrer Ionisation wieder absinken. *Wempe.*

Richardson, R. S.: The intensities of sunspots from center to limb in light of different colors. *Astrophys. J.* **90**, 230—234 (1939).

Verf. untersuchte während des Sommers 1938 mit dem 45 m-Turmteleskop und mit dem 22,5 m-Spektrograph eine Anzahl von Sonnenflecken in den Spektralgebieten  $\lambda\lambda$  4100, 5100, 5800 und 6600. Es wurde die Intensität der Flecken im Verhältnis zur Intensität der Sonnenscheibe für 13 verschiedene Sonnenflecken im Zeitraum von 25 Tagen bestimmt. Es wurden nur große, stabile Sonnenflecken untersucht, wenn die Sichtbarkeit 5 oder besser in der Zehnerskala war. Als Endergebnis zeigte sich, daß die Beobachtungen besser dargestellt werden, wenn man die Flecken als Gebilde im Strahlungs- und nicht im adiabatischen Gleichgewicht betrachtet. Für die Umbra wurde eine Temperatur von 4300° K gefunden, die ungefähr um 500° kleiner ist, als üblich angegeben wird. Verf. schreibt diesen Unterschied den außerordentlich günstigen Sichtbarkeitsverhältnissen während seiner Beobachtungen zu.

*Hubert Slouka (Prag).*

Richardson, R. S.: Intensity changes in bright chromospheric disturbances. *Astrophys. J.* **90**, 368—377 (1939).

Levin, B. J.: Elements of the physical theory of meteors. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **25**, 371—374 (1939).

Die von einem Meteor beim Eindringen in die Erdatmosphäre durch Molekül-



stöße aufgenommene Energie wird nach experimentellen Erfahrungen an Gasentladungen [K. T. Compton and I. Langmuir, *Rev. Modern Physics* 2, 210 (1930)] proportional der 3. Potenz der (zunächst als konstant angenommenen) Geschwindigkeit angesetzt und für einen zylindrischen Körper die Temperaturverteilung im Innern unter Vernachlässigung der Ausstrahlung berechnet. Es ergibt sich eine der Luftdichte proportionale Temperaturzunahme im wesentlichen nur in einer dünnen oberflächenschicht. Da Verdampfung und damit Aufleuchten des Meteors bei einer von anderen Parametern nahezu unabhängigen Temperatur (2700—2800°) einsetzen, scheinen aus der Höhe des Aufleuchtens Schlüsse auf die Dichteverteilung  $\rho(H)$  der Atmosphäre möglich. Für den Ansatz  $\rho = \rho_0 e^{-H/H^*}$  folgt aus den Beobachtungen  $H^* \approx 10$  km. Ferner wird aus der Massenabnahme durch Verdampfen die Geschwindigkeitsabnahme gemäß dem Impulssatz abgeleitet und daraus die Geschwindigkeit als Funktion der Höhe gewonnen.

Wempe (Jena).

**Russell, Henry Norris:** Notes on ellipticity in eclipsing binaries. *Astrophys. J.* 90, 641—674 (1939).

Für 19 enge Bedeckungsveränderliche wird aus der Drehung der Apsidenlinie, den Massen und Bahndimensionen auf Grund einer Formel von Cowling (dies. Zbl. 19, 383) eine Größe  $K$  abgeleitet, die für das Dichtegesetz im Sterninnern charakteristisch ist. Bei allen Sternen ergibt sich eine sehr große Dichtekonzentration im Sternzentrum,  $\rho_c/\bar{\rho}$  liegt zwischen 48 und 460. Weiter wird untersucht, in welcher Weise die geometrische Elliptizität, das Dichtegesetz, die Randverdunklung und die mit der Gravitation veränderliche Oberflächenhelligkeit zusammenwirken auf die photometrische Elliptizität, die aus der Lichtkurve außerhalb der Bedeckung bestimmt wird. Wenn  $K$  aus der Apsidendrehung und die Randverdunklung aus der Beobachtung bei anderen Sternen übernommen wird, läßt sich der der Randverdunklung entgegenwirkende Gravitationseinfluß aus der Lichtkurve ableiten, allerdings nur mit großer Unsicherheit. Die durch die Bedeckung zweier unähnlicher, gleichförmig leuchtender Sternellipsoide erzeugte Lichtkurve läßt sich innerhalb der Beobachtungsfehler ersetzen durch die Lichtkurve zweier ähnlicher Ellipsoide mit Randverdunklung. So ist es praktisch nicht möglich, genaue geometrische Formen allein aus photometrischen Beobachtungen zu bestimmen.

Haffner (Göttingen).

**Sterne, Theodore Eugene:** On the determination of the orbital elements of eccentric eclipsing binaries. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 26, 36—40 (1940).

**O'Keefe, John A.:** Remarks on Loreta's hypothesis concerning R Coronae Borealis. *Astrophys. J.* 90, 294—300 (1939).

E. Loreta [*Astron. Nachr.* 254, 151 (1934)] hat zur Erklärung des Lichtwechsels bei Veränderlichen vom Typus *R CrB* die Hypothese vorgeschlagen, daß der Stern selbst eine Gaswolke (analog den eruptiven Sonnenprotuberanzen) ausstoße, deren Kondensation den Steilabfall der Helligkeit zum Minimum und deren allmähliche Zerstreuung den Wiederanstieg zur Normalhelligkeit verursache. Die Möglichkeit eines solchen Vorgangs wird vom Verf. genauer untersucht unter der durch den spektroskopischen Befund nahegelegten Annahme, daß die ausgeschleuderte Materie überwiegend Kohlenstoff sei. Zunächst wird aus der freien Energie für ein- und zweiatomigen Kohlenstoff der Dampfdruck in Abhängigkeit von der Temperatur berechnet. Als zweite Beziehung zwischen Druck und Temperatur dient die Gasgleichung mit einem Wert von  $10^{-16}$  g/cm<sup>3</sup> für die Dichte, die der Verf. aus der zur Erzeugung der beobachteten Amplitude von 8 Größenklassen nötigen Gesamtmenge festen Kohlenstoffs abschätzt. Damit ergibt sich für den Kondensationspunkt der Druck zu  $9 \cdot 10^{-13}$  Atmosphären und die Temperatur zu 1360°. Da die schwarze Temperatur diesen Wert in einer Entfernung von 7,6 Sternradien erreicht, scheint die Hypothese in dieser Hinsicht nicht auf Schwierigkeiten zu stoßen.

Wempe (Jena).